TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ SOSE15
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
DR. RALF HIELSCHER

Übungen zu Numerische Methoden für Ingenieure

http://www.tu-chemnitz.de/~rahi

Übungsblatt 3

Aufgabe 1: Betrachten Sie die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ -2 & 2 & -3 & 4 & -5 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -9 & 8 & -10 \\ -5 & 2 & -12 & 8 & -5\cdots \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die L-R Faktorisierung der Matrix.

b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ für die rechten Seiten $\mathbf{b} = (15, -16, 1, -45, -30)^T$ und $\mathbf{b} = (-6, 6, 2, 10, 10)^T$.

Aufgabe 2: Betrachte Sie zu einer Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ und Stützstellen $t_j = \frac{j}{N}, j = 0, \ldots, N$ die Diskretisierung $\mathbf{f} = (f(t_0), \ldots, f(t_N))^T \in \mathbb{R}^{N+1}$ sowie die Diskretisierung Laplace-Operators $\triangle f = f''$ durch zweite Differenzen

$$[\triangle \mathbf{f}]_j = \begin{cases} f(t_0) - f(t_1), & j = 0, \\ 2f(t_j) - f(t_{j-1}) - f(t_{j+1}), & j = 1, \ldots, N-1, \\ f(t_N) - f(t_{N-1}), & j = N. \end{cases}$$

a) Stellen Sie die zu $\triangle$ gehörige Matrix $\mathbf{M}$ auf.

b) Berechnen Sie die L-R Faktorisierung von $\mathbf{M}$ mit Hilfe des Thomas Algorithmus. Wie kann man die Faktoren $\mathbf{L}$ und $\mathbf{R}$ interpretieren.

c) Berechnen Sie $\mathbf{L}^{-1}$.

d) Untersuchen Sie die Lösbarkeit des Gleichungssystems $\mathbf{Mf} = \mathbf{g}$ für eine beliebige rechte Seite $\mathbf{g} = (g_0, \ldots, g_N)^T$. Unter welcher Bedingung an $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{N+1}$ gibt es eine Lösung? Ist diese eindeutig?

e) Geben Sie einen expliziten Algorithmus zur Lösung des Gleichungssystems $\mathbf{Mf} = \mathbf{g}$ an.

Aufgabe 3: Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Finden Sie die exakte Lösung $\mathbf{x}^*$ des linearen Gleichungssystems.

b) Berechnen Sie ausgehend von $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ die ersten drei Iterationsschritte des Gesammtschrittverfahrens und berechnen Sie jeweils den Fehler zur exakten Lösung.