TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ SOSE2012
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
DANIEL POTTS

Übungen zur Vorlesung Wavelets

http://www.tu-chemnitz.de/˜potts/lehre.php

Übungsblatt 9

Aufgabe 1:
Eine Multiresolutionsanalysis besitze die Skalierungsfunktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Skalierungsfilter $(h(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ und Träger $\text{supp} h = \{0, 1, \ldots, 2N-1\}$, $N \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$|\text{supp}\varphi| = 2N - 1.$$

Tipps:

a) Zeigen Sie zunächst $\text{supp} D_a T_b f = \text{supp} f(a \cdot -b) = (\text{supp} f + b)/a$

b) Benutzen Sie den Kaskadenalgorithmus um für $L_l = |\text{supp}\eta_l|$ die Rekursionsgleichung

$$L_l = \frac{L_{l-1}}{2} + \frac{2N-1}{2}, \qquad L_0 = 1,$$

herzuleiten.

c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{l\to\infty} L_l$, falls dieser existiert.

Aufgabe 2:
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, zeigen Sie für die Familie

$$h(n) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\cos\alpha}{2} & n = 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sin\alpha}{2} & n = 1, \\ \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\cos\alpha}{2} & n = 2, \\ \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sin\alpha}{2} & n = 3, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

die QMF-Bedingungen. Für welche α erhalten Sie die Daubechies-4 bzw. die Haar-Skalierungskoeffizienten?

Aufgabe 3:
Wir betrachten nochmals die Faktorisierung

$$m_0(\gamma) = \left(\frac{1 + \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\gamma}}{2}\right)^N \mathcal{L}(\gamma), \qquad |\mathcal{L}(\gamma)|^2 = P_{N-1}(\sin^2(\pi\gamma))$$

mit den Daubechies Polynomen P_{N-1}, $N \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie für $N = 3$, d.h.,

$$P_2(y) = 1 + 3y + 6y^2$$

die Filterkoeffizienten $h(0), \ldots, h(5)$ in

$$m_0(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{5} h(n) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} n\gamma}.$$