

Übungen zur Vorlesung Wavelets

<http://www.tu-chemnitz.de/~potts/lehre.php>

Übungsblatt 6

Aufgabe 1:

Sei die Hütchenfunktion $\varphi(x) = (1 - |x|)\chi_{[-1,1]}(x)$ gegeben.

- a) Bestimmen Sie Koeffizienten $h(k)$ in der Zwei-Skalen-Relation

$$\varphi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) D_2 T_k \varphi.$$

- b) Stellen Sie mit einer geeigneten Funktion g die Hütchenfunktion als Faltingsprodukt dar

$$\varphi = g \star g.$$

- c) Berechnen Sie die Fourier Transformierte $\hat{\varphi}$.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie für die kardinalen B-Splines $N_m := N_{m-1} \star N_1$, $N_1 := \chi_{[0,1]}$ die Rekursionsgleichung

$$N_m(x) = \frac{x}{m-1} N_{m-1}(x) + \frac{m-x}{m-1} N_{m-1}(x-1).$$

Zeigen Sie dazu die Hilfsaussagen

$$N_m(x) = \int_{x-1}^x N_{m-1}(y) dy, \quad N'_m(x) = N_{m-1}(x) - N_{m-1}(x-1)$$

und führen Sie eine Induktion über $m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3:

Eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ habe kompakten Support und n verschwindende Momente, d.h.,

$$\text{supp}\varphi = [-\varepsilon, 1 + \varepsilon], \quad \varepsilon > 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)x^l dx = 0, \quad l = 0, \dots, n.$$

Bestimmen Sie die Indizes $j, k \in \mathbb{Z}$ für die

$$\int_{\mathbb{R}} D_{2^j} T_k \varphi(x) N_m(x) dx = 0.$$

Tipp: Überlegen Sie sich in welchen Intervallen N_m ein Polynom ist.

Hausaufgabe:

Implementieren Sie in Matlab eine Funktion `y=bspline(x,m)`, welche den m -ten kardinalen B-Spline an den Stellen x auswertet. Testen Sie ihre Funktion mit `hausaufgabe3.m` und erklären Sie die Ergebnisse im Zusammenhang mit Aufgabe 2 kurz.