

## Übungen zur Vorlesung Wavelets

<http://www.tu-chemnitz.de/~potts/lehre.php>

### Übungsblatt 5

#### Aufgabe 1:

Für  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\|\psi\|_2 = 1$ , heißt

$$m_\psi := \int_{\mathbb{R}} x |\psi(x)|^2 dx$$

*Massenzentrum.* Zeigen Sie für  $\psi_{j,k} = D_{2^j} T_k \psi$ , dass

$$m_{\psi_{j,k}} = 2^{-j}(m_\psi + k).$$

#### Aufgabe 2 (Poissonsche Summenformel):

Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  und seine Fourier Transformierte  $\hat{f}(v) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i v x} dx$  mögen der Abfallbedingung

$$|f(x)| \leq C(1 + |x|)^{-\alpha}, \quad |\hat{f}(v)| \leq C'(1 + |v|)^{-\alpha'}$$

für gewisse  $\alpha, \alpha' > 1$  und  $C, C' > 0$  genügen. Zeigen Sie

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}} f(x + r) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}.$$

Für  $x = 0$  gilt somit insbesondere

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}} f(r) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k).$$

#### Aufgabe 3 (Faltung):

Für  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  definieren wir die *Faltung*

$$(f \star g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x - y) dy.$$

Zeigen Sie für die Haar Skalierungsfunktion  $h = \chi_{[0,1]}$  und die kardinalen B-Splines

$$N_m = N_{m-1} \star N_1, \quad N_1 = h$$

die Identität

$$\hat{N}_m(v) = e^{-\pi i m v} \left( \frac{\sin \pi v}{\pi v} \right)^m.$$

Tipp: Betrachten Sie zunächst allgemein  $\widehat{f \star g}$ .

**Hausaufgabe:**

Machen Sie sich mit der Wavelet Toolbox von Matlab vertraut.

- a) `help dwt, help dwt2, help waveinfo`
- b) Betrachten Sie nochmals `hausaufgabe2.m` und testen Sie einen Zerlegungsschritt mit verschiedenen Wavelets. Welche qualitativen Unterschiede erkennen Sie in den Detailkoeffizienten?