TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
DANIEL POTTS

SOSE2012

Übungen zur Vorlesung Wavelets

http://www.tu-chemnitz.de/~potts/lehre.php

Übungsblatt 3

Definition: Das *Kronecker Produkt* von $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ und $B \in \mathbb{R}^{q,r}$ sei

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}B & \dots & a_{m,n}B \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1:
Sei $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $B \in \mathbb{R}^{q,r}$, $C \in \mathbb{R}^{n,p}$, $D \in \mathbb{R}^{r,s}$, zeigen Sie

$$(A \otimes B)\,(C \otimes D) = AC \otimes BD.$$

Im Besonderen gilt also

a) mit den Einheitsmatrizen $I_n \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $I_q \in \mathbb{R}^{q,q}$:

$$A \otimes B = (A \otimes I_q)\,(I_n \otimes B)$$

b) und für $m = n$, $q = r$ und A, B regulär:

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

Aufgabe 2:
Sei $A \in \mathbb{R}^{m,m}$, $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ regulär und $C \in \mathbb{R}^{m,n}$, gesucht ist $X \in \mathbb{R}^{m,n}$, so dass

$$AXB = C.$$

Zeigen Sie, dass obige Gleichung linear in X ist und finden Sie die entsprechende Formulierung als lineares Gleichungssystem in

$$\mathrm{vec}X := \left(x_{1,1} \ldots x_{m,1} x_{1,2} \ldots x_{m,n}\right)^\top.$$

Definition: Eine Matrizen A heißt *schwachbesetzt* (engl. sparse), falls es sich „lohnt" die Struktur der Nicht Null Einträge zu nutzen.

Aufgabe 3 (Walsh Hadamard Transformation):
Es sei

$$W_k := W_{k-1} \otimes W_1, \qquad W_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie W_k^{-1}, siehe auch 1b).

b) Wieviele Nicht Null Einträge besitzt W_k?

c) Faktorisieren Sie W_k in ein Produkt schwachbesetzter Matrizen.

d) Wieviele Gleitkommaoperationen sind notwendig um das Matrix Vektor Produkt $W_k x$ zu berechnen?