TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
DANIEL POTTS SOSE2012

Übungen zur Vorlesung Wavelets

http://www.tu-chemnitz.de/~potts/lehre.php

Übungsblatt 2

Aufgabe 1:
Zeigen Sie

a) $p_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{j+1,2k} + p_{j+1,2k+1})$ und

b) $h_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{j+1,2k} - p_{j+1,2k+1})$.

Aufgabe 2:
Zerlegen Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ 2 & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}, \\ 3 & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4}, \\ 4 & \frac{3}{4} \leq x < 1, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

als

a) $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_J(k) p_{J,k}$ mit geeignetem $J \in \mathbb{Z}$,

b) $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_1(k) p_{1,k} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_1(k) h_{1,k}$,

c) $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_0(k) p_{0,k} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_0(k) h_{0,k} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_1(k) h_{1,k}$

und bestimmen Sie die Gesamtanzahl der von Null verschiedenen Koeffizienten in jeder Darstellung.

Definition: Für $d = 2$ und $j, k \in \mathbb{Z}^2$ definieren wir die dyadischen Boxen, die Haar-Skalierungsfunktion und die Haar-Funktionen

$$\begin{aligned}
I_{j,k} &:= [2^{-j_1}k_1, 2^{-j_1}(k_1+1)) \times [2^{-j_2}k_2, 2^{-j_2}(k_2+1)),\\
p_{j,k} &:= 2^{j_1/2}2^{j_2/2}\chi_{I_{j,k}},\\
h^1_{j,k} &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{\binom{j_1+1}{j_2},\binom{2k_1}{k_2}} - p_{\binom{j_1+1}{j_2},\binom{2k_1+1}{k_2}}),\\
h^2_{j,k} &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{\binom{j_1}{j_2+1},\binom{k_1}{2k_2}} - p_{\binom{j_1}{j_2+1},\binom{k_1}{2k_2+1}}),\\
h^3_{j,k} &:= \frac{1}{2}(p_{\binom{j_1+1}{j_2+1},\binom{2k_1}{2k_2}} + p_{\binom{j_1+1}{j_2+1},\binom{2k_1+1}{2k_2+1}} - p_{\binom{j_1+1}{j_2+1},\binom{2k_1+1}{2k_2}} - p_{\binom{j_1+1}{j_2+1},\binom{2k_1}{2k_2+1}}).
\end{aligned}$$

Aufgabe 3:
Zeigen Sie

a) $p_{j,k} = D_{2^j}T_k p_{0,0} = 2^{j_1/2}2^{j_2/2}\chi_{[0,1)^2}(2^{j_1}x_1 - k_1, 2^{j_2}x_2 - k_2)$,

b) $p_{\binom{j_1}{j_2},\binom{k_1}{k_2}}(x_1, x_2) = p_{j_1,k_1}(x_1)p_{j_2,k_2}(x_2)$,

c) $h^1_{\binom{j_1}{j_2},\binom{k_1}{k_2}}(x_1, x_2) = h_{j_1,k_1}(x_1)p_{j_2,k_2}(x_2)$,

d) $h^2_{\binom{j_1}{j_2},\binom{k_1}{k_2}}(x_1, x_2) = p_{j_1,k_1}(x_1)h_{j_2,k_2}(x_2)$,

e) $h^3_{\binom{j_1}{j_2},\binom{k_1}{k_2}}(x_1, x_2) = h_{j_1,k_1}(x_1)h_{j_2,k_2}(x_2)$.