TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ SOSE2012
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
DANIEL POTTS

Übungen zur Vorlesung Wavelets

http://www.tu-chemnitz.de/˜potts/lehre.php

Übungsblatt 11

Sei

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx \quad \text{for all} \quad f, g \in L^2_{2\pi}\,.$$

Wir betrachten

$$S_n f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \langle f, D_n(\circ - x)\rangle\,,$$

mit den Koeffizienten

$$a_0 := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt, \quad a_k := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\, dt, \quad b_k := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\, dt\,.$$

Der Dirichlet-Kern sei gegeben durch

$$D_n(x) := 1 + 2\sum_{s=1}^{n}\cos sx = \begin{cases} \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,, & \text{for } x \notin 2\pi\mathbb{Z}\,,\\ 2n+1\,, & \text{for } x \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Zeigen Sie

$$D_n\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) = 0 \quad (k = 1, \ldots, 2n).$$

Wir definieren die de la Vallée Poussin Kerne φ_N^M, für $N, M \in \mathbb{N}$ und $N \geq M$, durch

$$\varphi_N^M(x) := \frac{1}{2M\sqrt{2N}}\sum_{m=N-M}^{N+M-1} D_m(x)\,.$$

Zeigen Sie,

$$\begin{aligned}
\varphi_N^M(x) &= \tfrac{1}{\sqrt{2N}}\left(1+2\sum_{\ell=1}^{N-M}\cos\ell x+2\sum_{\ell=N-M+1}^{N+M-1}\tfrac{N+M-\ell}{2M}\cos\ell x\right)\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2N}}\left(D_{N-M}(x)+\sum_{k=-M+1}^{M-1}\tfrac{M-k}{M}\cos(N+k)x\right)\\
\varphi_N^M\left(\tfrac{k\pi}{N}\right) &= 0 \quad (k=1,\dots,2N-1).
\end{aligned}$$

Der zugehörige trigonometrische Interpolationsoperator $L_N^M : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ ist durch

$$L_N^M f(x) := \frac{1}{\sqrt{2N}}\sum_{s=0}^{2N-1} f\left(\frac{s\pi}{N}\right)\varphi_N^M\left(x-\frac{s\pi}{N}\right)$$

gegeben. Zeigen Sie,

$$L_N^M f\left(\frac{k\pi}{N}\right) = f\left(\frac{k\pi}{N}\right) \quad \forall k\in\mathbb{Z}\,.$$

Für $s=0,\dots,2N-1$, definieren wir die Translate

$$\varphi_{N,s}^M(x) := \varphi_N^M\left(x-\frac{s\pi}{N}\right)\,.$$

Zeigen Sie: $\varphi_{N,s}^M\left(\frac{k\pi}{N}\right) = \sqrt{2N}\delta_{k,s}$, für $k,s=0,\dots,2N-1$.
Sei

$$V_N^M := \operatorname{span}\left\{\varphi_{N,s}^M : s=0,\dots,2N-1\right\}\,.$$

Zeigen Sie: Für alle $k\in\mathbb{N}_0$, sei $k\equiv \ell \bmod 2N$, mit $0\le\ell\le 2N-1$. Dann gilt

$$L_N^M\cos(k\circ)(x)$$

$$=\begin{cases}
\cos\ell x\,, & \text{falls}\quad 0\le\ell\le N-M\,,\\
\frac{M+(N-\ell)}{2M}\cos\ell x+\frac{M-(N-\ell)}{2M}\cos(2N-\ell)x\,, & \text{falls}\quad N-M<\ell<N+M\,,\\
\cos(2N-\ell)x\,, & \text{falls}\quad N+M\le\ell\le 2N-1\,,
\end{cases}$$

$$L_N^M\sin(k\circ)(x)$$

$$=\begin{cases}
\sin\ell x\,, & \text{falls}\quad 0<\ell\le N-M\,,\\
\frac{M+(N-\ell)}{2M}\sin\ell x-\frac{M-(N-\ell)}{2M}\sin(2N-\ell)x\,, & \text{falls}\quad N-M<\ell<N+M\,,\\
-\sin(2N-\ell)x\,, & \text{falls}\quad N+M\le\ell\le 2N-1\,.
\end{cases}$$

Die Gram-Matrix
$$\mathbf{G}_N^M := \left(\langle \varphi_{N,r}^M, \varphi_{N,s}^M \rangle\right)_{r,s=0}^{2N-1}$$
kann in der Form
$$\mathbf{G}_N^M = \overline{\mathbf{F}}_{2N} \mathbf{D}_N^M \mathbf{F}_{2N} \,,$$
mit der Fourier-Matrix
$$\mathbf{F}_{2N} := \frac{1}{\sqrt{2N}} \left(e^{-\frac{2\pi i r s}{2N}}\right)_{r,s=0}^{2N-1} , \overline{\mathbf{F}}_{2N} = (\mathbf{F}_{2N})^{-1}$$
und der Diagonal-Matrix $\mathbf{D}_N^M = \operatorname{diag}(d_{N,r}^M)_{r=0}^{2N-1}$ geschrieben werden.
Zeigen Sie:
$$d_{N,r}^M = \begin{cases} \frac{M^2+(N-r)^2}{2M^2} \,, & \text{falls} \quad N-M < r < N+M \,, \\ 1 \,, & \text{sonst} \,. \end{cases}$$
Sei $N_j := c2^j$ mit $c \in \mathbb{N}$ und
$$M_j := \begin{cases} 2^{j-\lambda}, & \text{falls} \quad j \geq \lambda \,, \\ 1 \,, & \text{falls} \quad j < \lambda \end{cases}$$
und $\lambda \in \mathbb{N}_0$. Wir fordern
$$\langle \phi_{j,k}, \psi_j \rangle = 0 \,, \qquad \text{für alle } k = 0, \ldots, 2N_j - 1$$
und
$$\psi_j \left(\frac{(2m+1)\pi}{2N_j}\right) = \sqrt{2N_j}\,\delta_{m,0} \,, \qquad \text{for all } m = 0, \ldots, 2N_j - 1 \,.$$
Es existiert eine eindeutige Funktion mit
$$\psi_j(x) := \sqrt{2}\phi_{j+1}\left(x - \frac{\pi}{2N_j}\right) - \phi_j\left(x - \frac{\pi}{2N_j}\right) \,.$$
Für die Translate $\psi_{j,n}(x) := \psi_j(x - \frac{n\pi}{N_j}), n = 0, \ldots, 2N_j - 1$, gilt die Verfeinerungsgleichung
$$\psi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{j+1,2n+1}(x) - \frac{1}{2\sqrt{N_j}} \sum_{s=0}^{2N_j-1} \phi_{j,s}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2N_j}\right)\phi_{j+1,2s}(x)$$
sowie
$$\psi_{j+1}(x) = \sqrt{2}\psi_j(2x)\frac{1+\cos(x - \frac{\pi}{2N_{j+1}})}{2} \,.$$