

Übungen zur Vorlesung Wavelets

<http://www.tu-chemnitz.de/~potts/lehre.php>

Übungsblatt 1

Aufgabe 1:

Für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$, seien die folgenden Operatoren erklärt

$$\begin{aligned}D_a f(x) &= (D_a f)(x) := \sqrt{a} f(ax), \\T_b f(x) &= (T_b f)(x) := f(x - b), \\M_c f(x) &= (M_c f)(x) := e^{2\pi i c x} f(x).\end{aligned}$$

Skizzieren Sie $f(x) = e^{-x^2}$, $D_2 f$, $T_2 f$ und $M_2 f$.
Zeigen Sie

$$\begin{aligned}D_a T_b &= T_{\frac{b}{a}} D_a, \\D_a M_c &= M_{ac} D_a, \\T_b M_c f(x) &= e^{-2\pi i b c} M_c T_b f(x).\end{aligned}$$

Zur letzten Äquivalenz: Wann gilt also $T_b M_c = M_c T_b$?

Aufgabe 2:

Für $f \in L^1(\mathbb{R})$ sei die Fourier-Transformierte $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\hat{f}(v) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i v x} dx$$

erklärt. Zeigen Sie

$$\begin{aligned}\widehat{D_a f} &= D_{\frac{1}{a}} \hat{f}, \\ \widehat{T_a f} &= M_{-a} \hat{f}\end{aligned}$$

und falls $f \in L^p(\mathbb{R})$ noch

$$\|T_b M_c f\|_{L^p} = \|f\|_{L^p},$$
$$\|D_a f\|_{L^p} = a^{\frac{p-2}{2p}} \|f\|_{L^p}.$$

Aufgabe 3:

Berechnen Sie die Fourier-Transformierte

a) der Rechteckfunktion

$$f(x) = \chi_{[0,1)}(x) := \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

b) und der Gauß-Funktion $f(x) = e^{-x^2}$.