TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
DANIEL POTTS

SOSE2013

Übungen zur Vorlesung Analysis der partiellen Differentialgleichungen

http://www.tu-chemnitz.de/~potts/lehre.php

Übungsblatt 6

1. Man zeige, dass die Fourier-Transformation $\hat{f}$ von $f \in L_1(\mathbb{R})$ beschränkt und stetig ist. Weiterhin bestimme man die Operatornorm des Fourier-Operators $\mathcal{F} : L_1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$.

2. Man bestimme die Fourier-Transformation der folgenden Funktionen:

   a) $f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

   b) $f(x) := \mathrm{e}^{-2\pi|x|}$

   c) $f(x) := \frac{1}{x^2+a^2}, \qquad a > 0$

3. Man zeige, dass für $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ die Funktion $u(x,t) = f(x - ct)$, $c > 0$ konstant, als reguläre Distribution eine Lösung der Transportgleichung $u_t + cu_x = 0$ auf $\Omega = \mathbb{R}^2$ ist.

4. Für $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ definiere man sich die Familie $\{f_h\}_{0<h\in\mathbb{R}}$ durch

$$f_h(x) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

   Man zeige

$$\lim_{h\to 0} T_{f_h} = DT_f.$$