TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ SOSE2013
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
DANIEL POTTS

Übungen zur Vorlesung Analysis der partiellen Differentialgleichungen

http://www.tu-chemnitz.de/~potts/lehre.php

Übungsblatt 3

1. Es ist die Lösungsfläche $u = u(x, y)$ der Differentialgleichung
$$xu_x - yu_y = u^2$$
zu bestimmen, die die Gerade
$$G: \qquad x = s,\ y \equiv 1,\ u = s \quad (-\infty < s < \infty)$$
enthält.

2. Man bestimme die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung
$$u_x - yu_y - u_z = 0, \quad u = u(x, y, z)$$
und ermittle die Lösung, die der Anfangsbedingung $u(x, y, x) = x + y$ genügt.

3. Man gebe die allgemeine Lösung $u = u(x, y)$ der partiellen Differentialgleichung $xu_x + yu_y - u = 0$ an und mache die Probe.

4. Die Eikonal Gleichung der geometrischen Optik ist gegeben durch
$$\|\nabla u\|_2 = \frac{1}{c}, \qquad u(x, y),\ c > 0.$$
   a) Man bestimme die charakteristischen Streifen zur Anfangskurve
$$K: \qquad x = f(s),\ y = g(s),\ z = 0 \quad (s \in I \subset \mathbb{R})$$
   und interpretiere das Ergebnis.
   b) Man berechne für $a \geq 0$ Lösungen u mit $u(s, s) = as$, $s > 0$.

5. Man transformiere die Wellengleichung in $n \geq 1$ Raumdimensionen
$$u_{tt} - c^2 \Delta_n u = 0$$
in eine Gleichung für radialsymmetrische Lösungen $v(r, t)$, d.h. in eine Gleichung für $v(r(\boldsymbol{x}), t) := u(\boldsymbol{x}, t)$ mit $r(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|_2$. Dabei bezeichne $\Delta_n := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ den n-dimensionalen Laplace Operator bzgl. der Ortsvariablen $\boldsymbol{x}$.