TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ SOSE2013
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
DANIEL POTTS

Übungen zur Vorlesung Analysis der partiellen Differentialgleichungen

http://www.tu-chemnitz.de/~potts/lehre.php

Übungsblatt 2

1. Man bestimme die Typen (linear, homogen, quasilinear) der folgenden partiellen Differentialgleichungen
   a) $x^2 u_t = u^2 u_x - 2, \quad u = u(t,x)$,
   b) $u_x^2 = \mathrm{e}^u u_y + \mathrm{e}^{xy}, \quad u = u(x,y)$,
   c) $v_t = 3v_x - \sin(t+x), \quad v = v(t,x)$,
   d) $w_x^2 + 3\sin(w)w_y = x\cos y, \quad w = w(x,y)$,
   e) $u_x = 0, \quad u = u(x,y)$.

2. Es ist die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung
$$xu_x - yu_y + zu_z = 0, \quad u = u(x,y,z)$$
zu ermitteln. Bestätigen Sie die Lösung mittels Probe.

3. Man finde die allgemeine Lösung der Differentialgleichung
$$xu_x + u_y + u = x + y, \quad u = u(x,y).$$

4. Die Burgers-Gleichung
$$u_t + uu_x = 0$$
beschreibt die eindimensionale (zeitabhängige) Bewegung eines kompressiblen Gases mit der Geschwindigkeitsverteilung $u = u(x,t)$ für $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Anfangsverteilung $u_0(x) := u(x,0)$ gegeben.
   a) Man berechne die allgemeine Lösung.
   b) Man löse die Aufgabe für die Anfangsdaten
      i. $u_0(x) = 2(x+1)$ und
      ii. $u_0(x) = 2(1-x)$,

      zeichne die charakteristischen Grundkurven und gebe den Zeitpunkt T an, bis zu dem sich die Lösung eindeutig berechnen lässt.

5. Für $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ und $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, mit $\boldsymbol{R}^\top \boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$, beweise man

   a) $\Delta(u \circ \boldsymbol{R}) = (\Delta u) \circ \boldsymbol{R}$,

   b) $\|\nabla(u \circ \boldsymbol{R})\|_2 = \|(\nabla u) \circ \boldsymbol{R}\|_2$,

   d.h. die obigen Operationen sind rotationsinvariant.