TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
DANIEL POTTS

SOSE2013

Übungen zur Vorlesung Analysis der partiellen Differentialgleichungen

http://www.tu-chemnitz.de/~potts/lehre.php

Übungsblatt 1

1. Ermitteln Sie Lösungen der partiellen Differentialgleichung $v_y = xyv$ für die Funktion $v = v(x, y)$.

2. Parametrisieren Sie den Rand $\partial\Omega$ und die Außennormalen $\boldsymbol{n}$ des Bereiches $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.

3. Zeigen Sie, dass die Funktion u mit $u(x, y) = 0$ für $x + y \leq 0$ und

$$u(x,y) = \frac{1}{9}\mathrm{e}^{y-x} \cdot \begin{cases} (6x + 6y - 9), & 3 \leq x + y, \\ (x + y)^2, & 0 < x + y < 3, \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}^2$ die Differentialgleichung $u_x - u_y + 2u = 0$ erfüllt.

4. Zeigen Sie, dass für zwei harmonische Funktionen $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, d.h. $\Delta u = \Delta v = 0$, gilt

   a) die Summe $u + v$ ist harmonisch,

   b) das Produkt $u \cdot v$ ist genau dann harmonisch, wenn die Gradienten ∇u und ∇v orthogonal zu einander stehen.

5. Überprüfen Sie, dass jede differenzierbare Rotationsfläche $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $yu_x - xu_y = 0$ genügt. Die Fläche $z = u(x, y)$ entsteht dabei durch Rotation einer Funktion $f(x) = z$ um die z-Achse.