

## Übungen zur Vorlesung Analysis der partiellen Differentialgleichungen

<http://www.tu-chemnitz.de/~potts/lehre.php>

### Übungsblatt 5

1. Es sei die elliptische Differentialgleichung

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

gegeben, d.h. es gilt  $b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) < 0$  für  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Die zugehörige charakteristische Gleichung

$$ay'^2 - 2by' + c = 0$$

besitze die konjugiert komplexen Lösungen  $\eta(x, y)$  und  $\xi(x, y)$  mit

$$\eta_x(x, y)\xi_y(x, y) - \eta_y(x, y)\xi_x(x, y) \neq 0 \quad \text{für } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Man zeige, dass die Variablentransformation

$$\phi(x, y) := \operatorname{Re} \eta(x, y), \quad \psi(x, y) := \operatorname{Im} \eta(x, y)$$

auf Normalform führt.

2. Das folgende Anfangsrandwertproblem beschreibt, für konstantes  $a > 0$  das Schwingungsverhalten einer eingespannten Saite

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= a^2 u_{xx}(x, t), & x \in (0, \pi), t > 0 \\ u(x, 0) &= F(x), & x \in (0, \pi) \\ u_t(x, 0) &= G(x), & x \in (0, \pi) \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & t > 0. \end{aligned}$$

Für  $x \in [0, \pi]$  gibt dabei  $F(x)$  die Anfangsauslenkung und  $G(x)$  die Anfangsgeschwindigkeit der Saite an.

- a) Es seien  $\tilde{F}$  und  $\tilde{G}$  die ungeraden  $2\pi$ -periodische Fortsetzung von  $F$  bzw.  $G$ . Man zeige, dass die Lösung durch

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{F}(x + at) + \tilde{F}(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{G}(s) ds$$

gegeben ist.

(Hinweis: Die Eindeutigkeit zeige man wie in Aufgabe 4 des 4. Übungsblatts)

b) Man bestimme für  $n \in \mathbb{N}$  die Lösung zu den Anfangsbedingungen

$$F(x) = \sin(nx), \quad G(x) = 0, \quad \text{für } x \in [0, \pi]$$

in separierter Form, d.h.  $u(x, t) = f(x)g(t)$ .

3. Man zeige, dass für  $f, g \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R})$  die Funktion  $u(x, y) = f(x) + g(y)$ , als reguläre Distribution aufgefasst, im distributionellen Sinne eine Lösung der Differentialgleichung  $u_{xy} = 0$  ist.