TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
DANIEL POTTS SOSE2011

Übungen zur Vorlesung Analysis der partiellen Differentialgleichungen

http://www.tu-chemnitz.de/~potts/lehre.php

Übungsblatt 4

1. Man klassifiziere die folgenden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und skizziere gegebenenfalls die Gebiete unterschiedlichen Typs:
   a) $u_{xx} + 2yu_{xy} + xu_{yy} - u_x + u = 0$
   b) $2xyu_{xy} + xu_y + yu_x = 0$
   c) $u_{xx} + u_{yx} + 5u_{xy} + u_{yy} + 2u_{yz} + u_{zz} = 0$

2. Man transformiere die folgende Differentialgleichung auf Normalform.

$$x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + x^2 u_x + xyu_y = 0$$

3. Man zeige, dass für konstantes $a > 0$ die Lösung des Anfangswertproblem der eindimensionalen Schwingungsgleichung

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &= a^2 u_{xx}(x,t), && x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) &= F(x), && x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) &= G(x), && x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   mit Hilfe der D'Alembertschen Formel

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[F(x+at) + F(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} G(s)\mathrm{d}s$$

   angegeben werden kann.

4. Man betrachte das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &= a^2 u_{xx}(x,t), && x \in (0,L),\ t > 0 \\ u(x,0) &= F(x), && x \in (0,L) \\ u_t(x,0) &= G(x), && x \in (0,L) \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) &= 0, && t > 0, \end{aligned}$$

   und zeige, im Falle der Existenz einer Lösung, deren Eindeutigkeit.