

Übungen zur Vorlesung Analysis der partiellen Differentialgleichungen

<http://www.tu-chemnitz.de/~potts/lehre.php>

Übungsblatt 3

1. Es ist die Lösungsfläche $u = u(x, y)$ der Differentialgleichung

$$xu_x - yu_y = u^2$$

zu bestimmen, die die Gerade

$$G: \quad x = s, \quad y \equiv 1, \quad u = s \quad (-\infty < s < \infty)$$

enthält.

2. Man bestimme die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$u_x - yu_y - u_z = 0, \quad u = u(x, y, z)$$

und ermittle die Lösung, die der Anfangsbedingung $u(x, y, x) = x + y$ genügt.

3. Die Eikonal Gleichung der geometrischen Optik ist gegeben durch

$$\|\nabla u\|_2 = \frac{1}{c}, \quad u(x, y), \quad c > 0.$$

- a) Man bestimme die charakteristischen Streifen zur Anfangskurve

$$K: \quad x = f(s), \quad y = g(s), \quad z = 0 \quad (s \in I \subset \mathbb{R})$$

und interpretiere das Ergebnis.

- b) Man berechne für $a \geq 0$ Lösungen u mit $u(s, s) = as, s > 0$.

4. Man transformiere die Wellengleichung in $n \geq 1$ Raumdimensionen

$$u_{tt} - c^2 \Delta_n u = 0$$

in eine Gleichung für radialsymmetrische Lösungen $v(r, t)$, d.h. in eine Gleichung für $v(r(\mathbf{x}), t) := u(\mathbf{x}, t)$ mit $r(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2$. Dabei bezeichne $\Delta_n := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ den n -dimensionalen Laplace Operator bzgl. der Ortsvariablen \mathbf{x} .