

Übungen zur Vorlesung Analysis der partiellen Differentialgleichungen

<http://www.tu-chemnitz.de/~potts/lehre.php>

Übungsblatt 2

1. Man bestimme die Typen (linear, homogen, quasilinear) der folgenden partiellen Differentialgleichungen

a) $x^2 u_t = u^2 u_x - 2, \quad u = u(t, x),$

b) $u_x^2 = e^u u_y + e^{xy}, \quad u = u(x, y),$

c) $v_t = 3v_x - \sin(t + x), \quad v = v(t, x),$

d) $w_x^2 + 3 \sin(w) w_y = x \cos y, \quad w = w(x, y),$

e) $u_x = 0, \quad u = u(x, y).$

2. Es ist die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$x u_x - y u_y + z u_z = 0, \quad u = u(x, y, z)$$

zu ermitteln. Bestätigen Sie die Lösung mittels Probe.

3. Man finde die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x u_x + u_y + u = x + y, \quad u = u(x, y).$$

4. Die Burgers-Gleichung

$$u_t + u u_x = 0$$

beschreibt die eindimensionale (zeitabhängige) Bewegung eines kompressiblen Gases mit der Geschwindigkeitsverteilung $u = u(x, t)$ für $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Anfangsverteilung $u_0(x) := u(x, 0)$ gegeben.

- a) Man berechne die allgemeine Lösung.
b) Man löse die Aufgabe für die Anfangsdaten

i. $u_0(x) = 2(x + 1)$ und

ii. $u_0(x) = 2(1 - x),$

zeichne die charakteristischen Grundkurven und gebe den Zeitpunkt T an, bis zu dem sich die Lösung eindeutig berechnen lässt.

5. Für $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ und $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, mit $\mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbf{I}$, beweise man
- a) $\Delta(u \circ \mathbf{R}) = (\Delta u) \circ \mathbf{R}$,
 - b) $\|\nabla(u \circ \mathbf{R})\|_2 = \|(\nabla u) \circ \mathbf{R}\|_2$,
- d.h. die obigen Operationen sind rotationsinvariant.