TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
DANIEL POTTS

SOSE2011

Übungen zur Vorlesung Analysis der partiellen Differentialgleichungen

http://www.tu-chemnitz.de/~potts/lehre.php

Übungsblatt 10

1. Gesucht ist in $0 < x < \pi$, $t > 0$ die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$u_t = u_{xx} + 1\,,$$

die die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = x + \sin x$$

und die Randbedingungen

$$u(0,t) = t\,, \quad u(\pi,t) = \pi$$

erfüllt.

2. Man finde partikuläre Lösungen der LAPLACE-Gleichung

$$\Delta u = 0, \quad u = u(x,y,z)$$

mit Hilfe des Produktansatzes $u(x,y,z) = u_1(x)\,u_2(y)\,u_3(z)$.

3. Es ist die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = 4u_{xx}, \quad u = u(t,x), \quad \text{im Bereich} \quad t > 0, \quad 0 < x < 1$$

für die Anfangsbedingung

$(A)_1 \qquad u(0,x) = \sin(\pi x) + 2\sin(2\pi x)$

und die (homogenen) Randbedingungen

$(R) \qquad u(t,0) = 0, \quad u(t,1) = 0$

zu lösen!

Praktischer Hintergrund:

Ein Stab der Länge 1, dessen Mäntel wärmeisoliert ist, hat die anfängliche Temperaturverteilung $u(0,x)$. Die Temperatur der Stabenden wird stets auf Null gehalten. Gesucht ist die Temperatur $u(t,x)$ in einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ an einer beliebigen Stellle x des Stabes.

4. Es ist eine Lösung der eindimensionalen Schwingungsgleichung

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u = u(t,x), \quad \text{im Bereich} \quad t > 0,\ 0 < x < 2$$

für die Anfangsbedingungen

$(A)_2 \qquad u(0,x) = \alpha\left(\sin(\pi x) + \sin(2\pi x) + \sin(3\pi x)\right), \quad u_t(0,x) = 0$

$(\alpha > 0)$und die (homogenen) Randbedingungen

$(R) \qquad u(t,0) = 0, \quad u(t,2) = 0$

zu ermitteln!

Praktischer Hintergrund:

Für eine an beiden Enden befestigte Saite der Länge 2, deren Anfangsauslenkung durch $u(0,x)$ gegeben und deren anfängliche Auslenkungsgeschwindigkeit gleich Null ist, soll die Auslenkung zu einer beliebigen Zeit $t > 0$ an einer beliebigen Stelle $x(0 < x < 2)$ ermittelt werden.