Übungen zum Kurs
Gewöhnliche Differentialgleichungen

6. Übung – Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung,
Eulersche Differentialgleichungen, Rand- und Eigenwertprobleme

---

1. Lösen Sie folgende homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

   (a) $y'' - y' - 6y = 0$,
   (b) $y'' + 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$,
   (c) $y'' - a^2 y = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$,
   (d) $y'' - 4y' + 13y = 0$,
   (e) $y'' + a^2 y = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$,
   (f) $y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$,
   (g) $y^{(4)} - 2y'' = 0$,
   (h) $y''' + y'' + y' + y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2$,
   (i) $y^{(4)} + y = 0$.

2. Lösen Sie folgende lineare inhomogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten (mit der Ansatzmethode)

   (a) $y^{(4)} + y = x$,
   (b) $y'' + 2y' + y = x$,
   (c) $y''' + 2y'' + y' = 2e^{3x}$,
   (d) $y''' - y = 6e^{-x}$,
   (e) $y'' + 4y = x^2 + \cos x$,
   (f) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x)$,
   (g) $y'' - 6y' + 8y = e^{2x}$,
   (h) $y'' - y = e^x$,
   (i) $y^{(4)} - 2y'' = x^2 + x - 1$.

3. Lösen Sie mit einem komplexen Ansatz

   (a) $y'' + y = e^{2x} \cos 3x$,
   (b) $y'' + y' + y = e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x$.

4. Lösen Sie mit Variation der Konstanten

   (a) $y''' + 2y'' + y' = 2e^{3x}$,
   (b) $y'' + 4y = \cos x$,
   (c) $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$.

5. Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

   $$\ddot{u}(t) + 4\dot{u}(t) + 4u(t) = 25 \sin t\,,$$

   die den Anfangsbedingungen $u(0) = 0$, $\dot{u}(0) = 1$ genügt!

   Überprüfen Sie Ihr Ergebnis !

6. Lösen Sie mit Hilfe der Laplace–Transformation folgende Anfangswertprobleme

   (a) $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$
   (b) $y'' + 4y' = \cos 2t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$
   (c) $y'' - 9y = e^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$
   (d) $y'' + 2y' + y = te^{-t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

7. Lösen Sie folgende Eulersche Differentialgleichung

   (a) $x^2y'' + xy' + 2y = 0,$
   (b) $x^2y'' - 3xy' + 4y = \ln x.$

8. Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom reellen Parameter $\lambda \neq 0$ alle Lösungen des Randwertproblems

$$y'' + \lambda 2y = 0\,,$$

   die die Bedingungen

   (a) $y(0) = 0,\ y(\pi) = 1,$ (b) $y(0) = y(\pi) = 1,$

   erfüllen.

9. Für welche reellen Zahlen λ hat das Randwertproblem

$$y''(x) - 2y'(x) + \lambda y(x) = 0\,,\ y(0) = y(1) = 0$$

   nichttriviale Lösungen?

Zusatz: Lösen Sie folgende Differentialgleichung

(a) $x^2y'' + xy' - y = x^3,$

(b) $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = x + \frac{1}{x}.$

---

6. Hausaufgabe

Lösen Sie folgende Aufgaben der 6. Übung

1 (g), 1 (h), 2 (a), 2 (c), 2 (h), 2 (i), 3 (b), 4 (b), 5., 6 (c) und 6 (d).