

Übungen zum Kurs Gewöhnliche Differentialgleichungen

3. Übung – Exakte Differentialgleichungen, integrierende Faktoren

1. Prüfe, ob folgende Differentialgleichungen exakt sind und bestimme gegebenenfalls die Lösung mit Hilfe eines integrierenden Faktors

a) $x^3 dx + y^3 dy = 0$

b) $x^2 - y^2 - 2xyy' = 0$

c) $\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$

d) $(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}) dx + (x^2 + y^2) dy = 0$

e) $(3x^2y + 4y^2) dx + (4xy - y^3) dy = 0$

f) $(y + xy^2) dx + (x - x^2y) dy = 0$

2. Bestimme die Form des integrierenden Faktors für die Differentialgleichung

$$Mdx + Ndy = 0$$

(in Abhängigkeit von M , N und evtl. z), wenn er vom folgenden Typ sein soll:

a) $\mu = \mu(x)$

b) $\mu = \mu(z)$, $z = x + y$

c) $\mu = \mu(z)$, $z = x \cdot y$

3. Für welche λ wird die Differentialgleichung

$$\lambda y(2 - x)y' = 3x^2 + y^2$$

exakt? Bestimme für dieses λ eine Integralkurve durch den Punkt (1,1)!

4. Man beweise:

Die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ besitzt genau dann einen integrierenden Faktor der Form $\mu = \mu(x)$, wenn sie linear ist.

3. Hausaufgabe

1. Achilles und die Schnecke auf einem Kaugummi:

Ein Kaugummi von 1 Meter Länge ist mit einem Ende an einer Wand festgeklebt. Auf dem anderen Ende sitzt eine Schnecke mit Blick zur Wand. Zum Zeitpunkt $t = 0$ erfasst der Läufer Achilles dieses Ende und läuft mit der Geschwindigkeit $v_A = 10 \frac{m}{s}$ von der Wand weg. Gleichzeitig beginnt die Schnecke mit $v_S = 1 \frac{mm}{s}$ auf dem Kaugummi in Richtung der Wand zu kriechen. Erreicht sie die Wand? Wenn ja, nach welcher Zeit?

2. Lösen Sie folgende Differentialgleichung

$$\left(\frac{1}{xy} + 2x \right) \frac{dx}{dy} + y^2 - \frac{\ln x}{y^2} = 0.$$

3. Bestimme die Form des integrierenden Faktors für die Differentialgleichung

$$Mdx + Ndy = 0$$

(in Abhängigkeit von M, N und evtl. z), wenn er vom folgenden Typ sein soll:

$$\mu = \mu(z), \text{ wobei a) } z = y, \text{ b) } z = \frac{y}{x}.$$

4. Lösen Sie die Aufgabe 1 e) der 3. Übung!