Übungen zum Kurs
Gewöhnliche Differentialgleichungen

2. Übung – Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

---

1. Lösen Sie folgende lineare Differentialgleichungen:

   (a) $y' = 2xy - x^3 + x$

   (b) $xy' - 2y = 2x^4$

   (c) $y' = (\sin x)(1 - y)$

   (d) $y' + y \sin x = \sin x \cos x$

   (e) $y' = \dfrac{-x}{1+x^2} y + \dfrac{1}{x(1+x^2)}$ $\quad (x > 0)$, wenn zwei spezielle Lösungen gegeben sind

   $$y_1 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ln\left(\frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$$

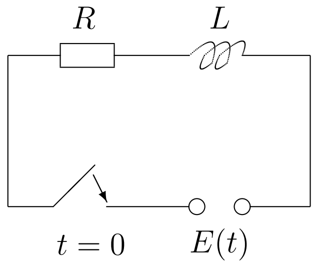
   $$y_2 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left(-1 + \ln\left(\frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)\right)$$

   (f) $y' + y\dfrac{d\varphi}{dx} = \varphi(x)\dfrac{d\varphi}{dx}$ $\quad$ ($\varphi(x)$ sei gegebene differenzierbare Funktion)

   (g) $(x - 2yx - y^2)dy = -y^2 dx$

2. Gegeben seien zwei spezielle Lösungen y_1 und y_2 einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung. Bestimme aus ihnen die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ($y_1 \neq y_2$). (Wenden Sie dies auf 1(e) an!)

3. Die Stromstärke J in einem Stromkreis mit dem Ohmschen Widerstand R, der Selbstinduktion L und der elektromotorischen Kraft E genügt der Differentialgleichung $L\frac{dJ}{dt} + RJ = E(t)$ (R und L konstant). Berechne $J(t)$, wenn zur Zeit $t = 0$ der Stromkreis geschlossen wird!
   a) $E(t) = E_o$ $\quad$ b) $E(t) = kt$ $\quad$ c) $E(t)$ beliebig.



4. Finde die Lösung der Gleichung

   $$y' \sin 2x = 2(y + \cos x)$$

   die für $x \to \frac{\pi}{2}$ beschränkt bleibt.

5. Ein Käfer befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am unteren Ende eines Baumes der Länge ℓ_0. Dieser Baum wächst gleichmäßig mit Geschwindigkeit v_2. Der Käfer beginnt nun mit konstanter Geschwindigkeit v_1 den Baum nach oben zu krabbeln. Erreicht der Käfer jemals die Spitze des Baumes?

6. Lösen Sie die Integralgleichungen

$$\text{a) } y(x) = \int_o^x y(t)dt + x + 1\,, \qquad \text{b) } x^2 + y(x) = \int_a^x ty(t)dt\,.$$

7. Lösen Sie folgende Bernoulli Differentialgleichungen

$$\text{a) } xy' + y = xy^2 \ln x\,, \qquad \text{b) } (x - y^2)dx + 2xydy = 0\,.$$

Zusatz: Erarbeiten Sie sich eine Lösungsmethode für die sogenannte Riccati-Differentialgleichung (siehe z.B. H. Heuser: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Seiten 69-70 oder W. Walter: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Seiten 32-33), und lösen Sie als Beispiele die Gleichungen

a) $y' = (1 - x)y^2 + (2x - 1)y - x$ b) $y' = e^{-x}y^2 + y - e^x$.

(Erraten Sie jeweils eine partikuläre Lösung!)

2. Hausaufgabe

---

1. Lösen aus der 1. Übung die Aufgaben 7 c) mit rechter Seite c^2 statt 1 und d).
2. Eine Kugel der Masse m werde aus großer Höhe mit der Anfangsgeschwindigkeit v_o auf die Erde geworfen. Nehmen Sie an, dass die einzigen Kräfte, die auf sie wirken, der Luftwiderstand proportional zu ihrer Geschwindigkeit und die Erdanziehungskraft sind.
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit!
3. Bestimmen Sie diejenige Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung $y' + y \sin x = \sin^3 x$, für die $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ ist.
4. Lösen Sie aus der 2. Übung die Aufgaben 1 c), g) sowie 3 b) und als Zusatzaufgabe zu 6. die Integralgleichung
$$\int_0^x tf(t)dt = f(x) - \frac{x^2}{2}\,.$$
5. Überprüfen Sie in Aufgabe 1 e) der 2. Übung, dass y_1 tatsächlich die inhomogene Differentialgleichung erfüllt!
6. Lösen Sie die Aufgabe 1 e) der 2. Übung mit Variation der Konstanten.
7. Lösen Sie folgende Bernoulli Differentialgleichung $y' + \frac{y}{1+x} + (1 + x)y^4 = 0$.

Zusatz 1: Lösen Sie die Riccati Differentialgleichung

$$y' + 2(1 - \frac{1}{x})y - \frac{1}{x}y^2 = x - 1\,.$$

Zusatz 2:
Lösen Sie $y' = \frac{1}{y} + \frac{1}{x}$ mit dem Anfangswert $y(1) = 1$.
(Hinweis: Die Lösung $y(x)$ existiert als Reihe in Potenzen von $\ln x$.)