TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
DANIEL POTTS

WISE21/22

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

http://www.tu-chemnitz.de/~potts

Übungsblatt 7

Aufgabe 1:
Man berechne die folgenden Kurvenintegrale gegebenenfalls unter Verwendung der Cauchyschen Integralformel. Die auftretenden Kurven sollen im mathematisch positiven Sinn durchlaufen werden.

1. $$\oint_{c_{1/2}} \frac{e^{2z}}{(z-i)^4}\,dz \quad \text{für} \quad c_1: \ |z-1| = \frac{\pi}{2}, \qquad c_2: \ |z+2i| = 2,$$

2. $$\oint_{c_{1/2/3}} \frac{z+3}{z^2-1}\,dz \quad \text{für} \quad \begin{array}{l} c_1: \ |z-1| = 1.9, \\ c_2: \ |z-i| = 1.5, \\ c_3: \ |z+1+i| = 1.1, \end{array}$$

3. $$\oint_{c_{1/2}} \frac{\sin^3 z}{(z-\pi/3)^2}\,dz \quad \text{für} \quad c_1: \ |z| = 1, \qquad c_2: \ |z| = 2,$$

4. $$\oint_{c} \frac{\ln z}{z^2+1}\,dz \quad \text{für} \quad c: \ |z-1-i| = 1.414,$$

5. $$\oint_{c} z^{17}\,dz \quad \text{für} \quad c: \ |z-16+17i| = 180.$$

Aufgabe 3:
Sei C die positiv orientierte Kreislinie $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| = r\}$ und $f(z) = (z -$

$z_0)^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie

$$\int\limits_C f(z)\mathrm{d}z = \begin{cases} 0, & \text{für } n \in \mathbb{Z}, n \neq -1, \\ 2\pi\mathrm{i}, & \text{für } n = -1. \end{cases}$$

Aufgabe 4:
a) Berechnen Sie $\int_C \mathrm{e}^z \mathrm{d}z$ längs der Strecke von 1 nach i.
b) Berechnen Sie $\int_C \frac{dz}{z^2}$ längs des Streckenzuges C von 1 über $1 + \mathrm{i}$ und $-1 + \mathrm{i}$ nach -1.

Aufgabe 5:
Sei f holomorph in einem Gebiet D, z ein beliebiger Punkt in D und die Kreislinie $K_r(z)$ sowie ihr Inneres ganz in D enthalten. Zeigen Sie, gilt

$$|f(\xi)| \leq M \text{ für alle } \xi \in K_r(z)$$

mit einer Konstanten $M > 0$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{n!M}{r^n}.$$