

## Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

<http://www.tu-chemnitz.de/~potts>

### Übungsblatt 6

#### Aufgabe 1:

Berechnen Sie

a)  $\oint_c \operatorname{Im} z \, dz$ ,  $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,

b)  $\int_c z \, dz$ ,  $c(t) = (i-1)t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ,

c)  $\int_c z \, dz$ ,  $c(t) = \begin{cases} -t & , 0 \leq t \leq 1, \\ -1 + (t-1)i & , 1 \leq t \leq 2, \end{cases}$

d)  $\oint_c \bar{z} \, dz$ ,  $c(t) = \begin{cases} t & , -1 \leq t \leq 1, \\ e^{i\pi(t-1)} & , 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$

#### Aufgabe 2:

a) Berechnen Sie  $\int_c \frac{1}{z} \, dz$  für  $c(t) = 1 + t(i-1)$  mit  $0 \leq t \leq 1$

(i) direkt und unter (ii) Verwendung einer Stammfunktion.

b) Berechnen Sie mit Hilfe von a)

(i)  $\int_0^1 \frac{1}{(t-1)^2 + t^2} \, dt$  und (ii)  $\int_0^1 \frac{2t-1}{(t-1)^2 + t^2} \, dt$ .

**Aufgabe 3:**

Berechne Sie direkt und mit Hilfe einer Stammfunktion

1.  $\int_c e^z dz$  für  $c(t) = (1+i)t$  mit  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ,

2.  $\int_c \frac{1}{z^2} dz$  für  $c(t) = e^{it}$  mit  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ ,

3.  $\int_c \cos z dz$  für  $c(t) = it$  mit  $0 \leq t \leq 1$  und

4.  $\int_c z^3 + 1 dz$  für  $c(t) = e^{it}$  mit  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .

**Aufgabe 4:**Berechnen Sie die folgenden Integrale längs der angegebenen Wege  $\gamma$ :

a)  $\int_\gamma |z| dz$ ,  $\gamma$  läuft geradlinig oder auf dem Kreisrand von  $-i$  nach  $i$

b)  $\int_\gamma |z|^2 dz$ ,  $\gamma : z(t) = a \cos t + ib \sin t$   $t \in [0, 2\pi]$ ,  $a, b > 0$

c)  $\int_\gamma \frac{z}{(z^2 + 4)^2} dz$ ,  $\gamma = \overline{z_1, z_2}$  (= Strecke von  $z_1$  nach  $z_2 \in \mathbb{C}$ )

d)  $\int_\gamma \cos z d\bar{z}$ ,  $\gamma$  achsenparalleler Rechtwinkelzug von  $0$  nach  $u + iv$