TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
DANIEL POTTS

WISE21/22

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

http://www.tu-chemnitz.de/~potts

Übungsblatt 4

Aufgabe 1:
Zeigen Sie: Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und sei $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \,. \end{array}$$

Aufgabe 2:
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Menge von komplexen Zahlen, $a \in D$ ein Häufungspunkt und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) f ist in a komplex differenzierbar mit der Ableitung $l \in \mathbb{C}$.

(b) Es existiert eine in a stetige Funktion $\varphi : D \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(a) + (z-a)\varphi(z) \text{ und } \varphi(a) = l \,.$$

(c) Es existiert eine in a stetige Funktion $\varrho : D \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(a) + (z-a)\cdot l + (z-a)\varrho(z) \text{ und } \varrho(a) = 0 \,.$$

(d) Definiert man $r : D \to \mathbb{C}$ durch $f(z) = f(a) + (z-a)\cdot l + r(z)$, so gilt

$$\lim_{z\to a} \frac{r(z)-r(a)}{z-a} = 0 \,.$$

Aufgabe 3:
Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

1. $M_1 = \{z; |z| < 1 - \operatorname{Re} z\}$,
2. $M_2 = \left\{z; \left|\frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}\right| = 2\right\}$,
3. $M_3 = \left\{z; \operatorname{Re}\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\right\}$,
4. $M_4 = \left\{z; \left|\frac{a - z}{\overline{a} + z}\right| < 1\right\}, \operatorname{Re} a > 0.$

Aufgabe 4:
Es sei $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Ferner sei $\xi \in S^1$ und $M = \{\xi^n; n \in \mathbb{Z}\} \subset S^1$. Zeigen Sie, dass M entweder endlich oder dicht in S^1 ist.