TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
DANIEL POTTS WISE21/22

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

http://www.tu-chemnitz.de/˜potts

Übungsblatt 3

Aufgabe 1:
Entwickeln Sie die folgendne Funktionen $f(z)$ in Potenzreihen um z_0:

1) $f(z) := \frac{3z^2+1}{z+1}$, $z_0 = 2$ und $z_0 = \mathrm{i}$

2) $f(z) := \frac{z^2}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})^2}$, $z_0 = 0$

3) $f(z) := \sin^2 z$, $z_0 = 0$

4) $f(z) := \cos(z^2 - 1)$, $z_0 = 0$

Aufgabe 2:
Zeigen Sie, dass die komplexe Konjugierung $f(z) := \overline{z}$ in $\mathbb{C}$ nirgends komplex differenzierbar ist.

Aufgabe 3:
Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!}$ für alle $c \in \mathbb{C}$ konvergiert.

Aufgabe 4:
Untersuchen Sie die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ mit $f_n(z) = \frac{\cos nz}{n^2}$ auf gleichmäßige Konvergenz

a) auf $X = \mathbb{R}$.

b) auf $X = \mathbb{C}$.

Aufgabe 5:

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(\cos n) \cdot z^n$.

b) Gegeben sei die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und

$$\lim_n \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = r\,.$$

Zeigen Sie: Die Reihe hat den Konvergenzradius r.

Aufgabe 6:

Zeigen Sie, dass für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(i) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

(ii) $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$

(iii) $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$

iv) $\sinh(-z) = -\sinh z$ und $\cosh(-z) = \cosh z$

gilt.

Aufgabe 7:

Zeigen Sie, dass für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(i) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

(ii) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

(iii) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

(iv) $\sin(-z) = -\sin z$ und $\cos(-z) = \cos z$

gilt.