TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
DANIEL POTTS

WISE21/22

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

http://www.tu-chemnitz.de/~potts

Übungsblatt 2

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie von den folgenden komplexen Zahlen jeweils den Real- und Imaginärteil sowie ihre Darstellung in Polarkoordinaten
a) $a = \mathrm{e}^{1-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, b) $b = \left(5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7}{8}\pi}\right)^2$, c) $c = \sqrt{-\mathrm{i}}$, d) $d = \sin \mathrm{i}$.

Aufgabe 2:
Beweises Sie für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ die Dreiecksungleichung

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

sowie

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow z_1 = cz_2\,, \text{ mit } c \geq 0\,.$$

Aufgabe 3:
a) Gegeben sei $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \neq 0$. Gesucht werden alle $w = \varrho(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$ mit $w^n = z, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
b) Berechen Sie alle $w \in \mathbb{C}$ mit $w^2 = \mathrm{i}$.

Aufgabe 4:

1. (a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der Abbildung $w = \cos z$.
   (b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $\cos z \in \mathbb{R}, \cos z \in [-1, 1], \cos z = 1$?
   (c) Bestimmen Sie die Perioden von $\cos z$.
2. Analog für die Sinushyperbolicus.

3. Analog für den Tangens.

Aufgabe 5:
Die Exponentialfunktion e^z definieren wir für beliebige komplexe $z = x + \mathrm{i}y$ durch

$$w = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)\,.$$

Zeigen Sie, dass die Definition äquivalent zu

$$\mathrm{e}^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$$

ist.

Aufgabe 6:
Wiederholen Sie: Häufungswert einer Folge, absolut konvergent, bedingt konvergent, divergent, Majorantenkriterium, Wurzelkriterium, Quotientenkriterium.