

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

<http://www.tu-chemnitz.de/~rahi>

Übungsblatt 9 - Cauchysche Integralformel

Aufgabe 1: Wo liegt der Fehler in folgender Rechnung: Für $\gamma: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$ berechnen wir

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = \overline{\int_{\gamma} z dz} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} i e^{-2it} dz = 0.$$

Aufgabe 2: Berechnen Sie folgenden Integrale direkt, mit Hilfe einer Stammfunktion oder über die Cauchysche Integralformel

- a) $\int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz$, e) $\int_{C_1(0)} \operatorname{Im} z dz$, h) $\int_{\gamma_1} \ln z dz$, k) $\oint_{C_{1.1}(-1-i)} \frac{z+3}{z^2-1} dz$,
- b) $\int_{\gamma_1} |z| dz$, f) $\int_{\gamma_1} \bar{z} dz$, i) $\oint_{C_{1.9}(1)} \frac{z+3}{z^2-1} dz$, l) $\oint_{C_{1.414}(1+i)} \frac{\ln z}{z^2+1} dz$,
- c) $\int_{\gamma_2} |z| dz$,
- d) $\int_{\gamma_1} \frac{z}{(z^2+4)^2} dz$, g) $\int_{\gamma_2} \bar{z} dz$, j) $\oint_{C_{1.5}(i)} \frac{z+3}{z^2-1} dz$, m) $\oint_{C_{180}(16-17i)} z^{17} dz$.

bezüglich der Kurven $\gamma_1: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = e^{it}$, $\gamma_2: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) = it$ und der Kreise $C_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| = r\}$ im mathematisch positiven Sinne.

Aufgabe 3: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch. Zeigen Sie:

- a) Die Mittelwerteigenschaft: Für jeden Kreis $C_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2: |x - x_0| = r\} \subset \Omega$ gilt

$$f(x_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{C_r(x_0)} f(x) dx.$$

- b) Das Maximumprinzip: Ist $f(x) \leq f(x_0)$ für ein $x_0 \in \Omega$ und alle $x \in \Omega$ so ist f konstant.