Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Daniel Potts
Dr. Ralf Hielscher

WS 16/17

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

http://www.tu-chemnitz.de/~ rahi

Übungsblatt 8 – Wegintegrale und Stammfunktion

Aufgabe 1: Berechnen Sie folgende Wegintegrale:

a) $\int_{-i}^{i} 1 \, \mathrm{d}z$, entlang der Verbindungsgeraden und des Einheitskreises,

b) $\int_{1}^{i} z \, \mathrm{d}z$, entlang der Verbindungsgeraden und des Einheitskreises,

c) $\int_{a}^{b} c \, \mathrm{d}z$, für $a, b, c \in \mathbb{C}$ entlang der Verbindungsgeraden,

d) $\int_{1}^{-1} z^{-2}$ entlang des nördlichen und des südlichen Einheitshalbkreises.

Aufgabe 2: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $F \colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von f, d.h., F ist holomorph auf Ω und es gilt $F'(z) = f(z)$, für alle $z \in \Omega$. Zeigen Sie, für jeden Weg $\gamma \colon [a, b] \to \Omega$ gilt

$$\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}\gamma(z) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ keine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ besitzt. Auf welchen Gebieten $\Omega \subset \mathbb{C}$ besitzt f eine Stammfunktion?

Aufgabe 4: Berechne Sie direkt und mit Hilfe einer Stammfunktion

a) $\displaystyle\int_\gamma \mathrm{e}^z \, \mathrm{d}z,\ \gamma(t) = (1+\mathrm{i})t,\ t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$,

b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^2} \, \mathrm{d}z,\ \gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\ t \in [0, \tfrac{\pi}{4}]$,

c) $\displaystyle\int_\gamma \cos z \, \mathrm{d}z,\ \gamma(t) = \mathrm{i}t,\ t \in [0, 1]$,

d) $\displaystyle\int_\gamma z^3 + 1 \, \mathrm{d}z,\ \gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\ t \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$.

Aufgabe 5: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $\gamma\colon [0,1] \to G$ eine geschlossene, glatte parametrisierte Kurve und $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass dann das folgende Integral rein imaginär ist:

$$I = \int_\gamma \overline{f(z)} f'(z) \mathrm{d}z.$$

Hinweis: Finden Sie eine Stammfunktion zum Intergral $I + \overline{I}$.

Aufgabe 6: Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph in $z_0 \in \Omega$. Zeigen Sie, dass es eine Umgebung $U \subset \Omega$ von z_0 und eine Funktion $F\colon U \to \mathbb{C}$ gibt mit $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in U$.

Aufgabe 7: Berechnen Sie die folgenden Integrale längs der angegebenen Wege:

a) $\displaystyle\int_\gamma |z| \mathrm{d}z$, γ läuft geradlinig oder auf dem Kreisrand von $-\mathrm{i}$ nach i

b) $\displaystyle\int_\gamma |z|^2 \mathrm{d}z$, $\gamma(t) = a\cos t + \mathrm{i}b\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, $a, b > 0$

c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{(z^2+4)^2} \mathrm{d}z$, γ ist die Strecke von $z_1 \in \mathbb{C}$ nach $z_2 \in \mathbb{C}$

d) $\displaystyle\int_\gamma \cos z \mathrm{d}\overline{z}$, γ ist der achsenparalleler Rechtwinkelzug von 0 nach $u + \mathrm{i}v$

Aufgabe 8: Berechnen Sie

a) $\displaystyle\oint_\gamma \operatorname{Im} z \, \mathrm{d}z, \ \gamma(\varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \ \varphi \in [0, 2\pi],$

b) $\displaystyle\int_\gamma z \, \mathrm{d}z, \ \gamma(t) = (\mathrm{i}-1)t, \ t \in [0,1],$

c) $\displaystyle\int_\gamma z \, \mathrm{d}z, \ \gamma(t) = \begin{cases} -t & t \in [0,1], \\ -1 + (t-1)\mathrm{i} & t \in [1,2], \end{cases}$

d) $\displaystyle\oint_\gamma \bar{z} \, dz, \ \gamma(t) = \begin{cases} t, & t \in [-1,1], \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(t-1)}, & t \in [1,2]. \end{cases}$

e) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z, \ \gamma(t) = 1 + t(\mathrm{i}-1), \ t \in [0,1],$

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(t-1)^2 + t^2} \, \mathrm{d}t$

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t-1}{(t-1)^2 + t^2} \, \mathrm{d}t.$