Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Daniel Potts
Dr. Ralf Hielscher

WS 16/17

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

http://www.tu-chemnitz.de/∼ rahi

Übungsblatt 7 - Cauchy Riemansche Differenzialgleichungen

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass eine holomorphe Funktion mit zusammenhängendem Definitionsbereich, die nur reelle Werte annimmt, konstant sein muss.

Aufgabe 2: Betrachten Sie holomorphe Funktionen der Form

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

wobei u ein Polynom der folgenden Form ist

$$u(x, y) = x^2 + 2axy + by^2.$$

a) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist u Realteil einer holomorphen Funktion f auf $\mathbb{C}$.

b) Bestimme für jedes solche Paar (a, b) alle zugehörigen holomorphen Funktionen f.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass zu jeder harmonischen Funktion $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine harmonische Funktion $v \colon \Omega \to \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

für alle $z = x + \mathrm{i}y$, $(x, y) \in \Omega$ holomorph ist.

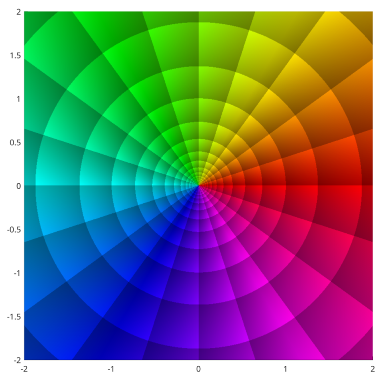
Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}\right) = 1 + z.$$

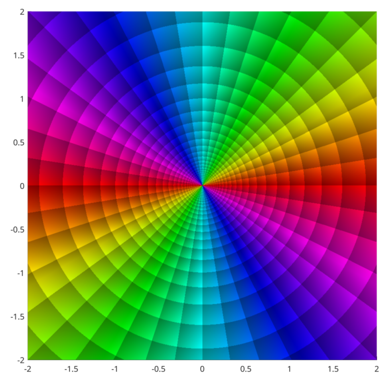
Tipp: Betrachten Sie

$$\frac{d}{dz} \frac{\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}\right)}{1 + z}$$

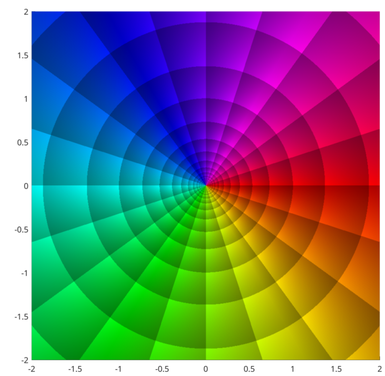
Aufgabe 5: Komplexe Funktionen lassen sich durch sogenannte Phasenplots visualisieren. Hierfür wird die komplexe Ebene entsprechend des Arguments eingefärbt. Bild (a) enthält zusätzlich eine Schattierung, welche die Höhenlinien gleichen Betrages hervorhebt. Welche Funktionen werden durch die Phasenplots (b) - (i) dargestellt?



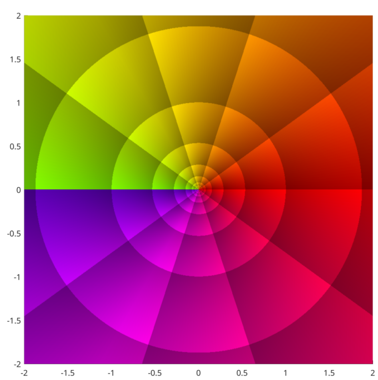
(a) $f(z) = z$



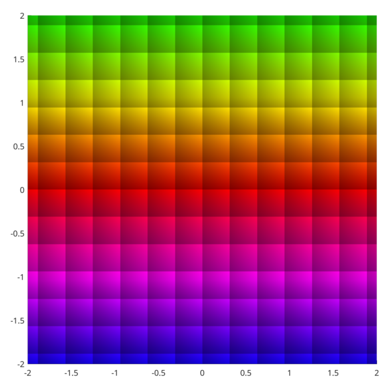
(b)



(c)

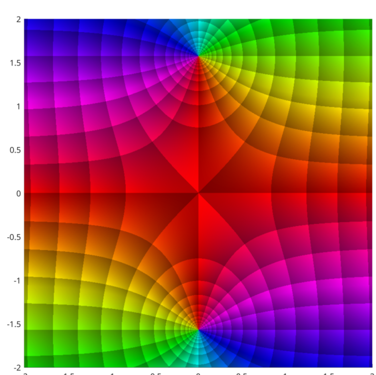


(d)

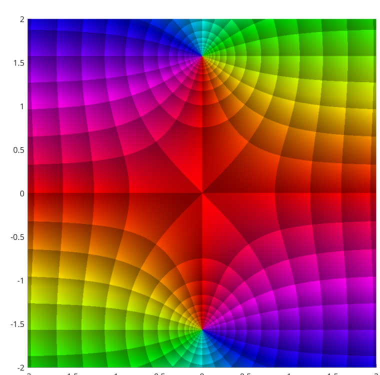


(e)

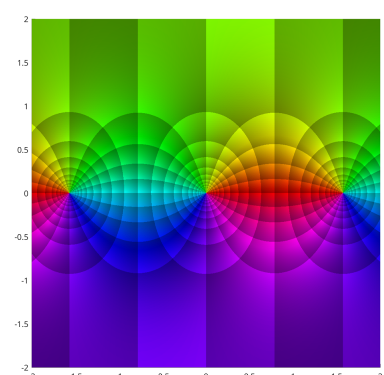
(f)



(g)



(h)



(i)