Technische Universität Chemnitz — WS 16/17
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Daniel Potts
Dr. Ralf Hielscher

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

http://www.tu-chemnitz.de/∼ rahi

Übungsblatt 6 – Möbiustransformation und Funktionen beschränkter Variation

Aufgabe 1: Betrachten Sie die Menge der Möbiustransformationen

$$\mathcal{R} = \left\{ f\colon \mathbb{C} \setminus \{-\tfrac{d}{c}\} \to \mathbb{C} \;:\; f(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ a,b,c,d \in \mathbb{C} \text{ mit } ad \neq bc \right\}.$$

a) Bestimmen Sie das Bild $f(\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\})$ einer Funktion $f \in \mathcal{R}$ und zeigen Sie, dass f auf dem Bild invertierbar ist.

b) Sei $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ versehen mit der Konvergenz $z_n \to \infty \iff |z_n| \to \infty$. Zeigen Sie, dass sich jede Funktion $f \in \mathcal{R}$ zu einer eineindeutigen, stetigen Abbildung

$$\bar{f}\colon \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}, \quad \bar{f}(z) = \begin{cases} \infty, & z = -\frac{c}{d} \\ \frac{a}{c}, & z = \infty \\ \frac{az+b}{cz+d}, & \text{sonst} \end{cases}$$

fortsetzen lässt.

c) Sei $\bar{\mathcal{R}} = \{\bar{f} : f \in \mathcal{R}\}$. Zeigen Sie, dass die Hintereinanderausführung $f_2 \circ f_1(z)$ zweier Funktionen $f_1, f_2 \in \bar{\mathcal{R}}$ ist wieder eine Funktion aus $\bar{\mathcal{R}}$ ist und schließen Sie, dass $\bar{\mathcal{R}}$ eine Gruppe ist. Welches ist das Einselement und welches das Inverse?

d) Zu welcher Gruppe ist $\mathcal{R}$ isomorph?

e) Zeigen Sie, dass jede Funktion $f \in \mathcal{R}$ mit $a \neq 0$ als Hintereinanderausführung dreier Abbildungen

$$L_1\colon z \mapsto A + Bz, \quad L_2\colon z \mapsto z^{-1}, \quad L_3\colon z \mapsto z + C.$$

dargestellt werden kann, wobei die Konstanten $A, B, C \in \mathbb{C}$ geeignet gewählt sind.

f) Zeigen Sie, dass die Funktionen $f \in \mathcal{R}$ Kreise und Geraden auf Kreise und Geraden abbilden.

Aufgabe 2:

a) Wiederholen Sie den Begriff einer Funktion beschränkter Variation.

b) Zeigen Sie, jede stetige, monotone Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem kompaktem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist von beschränkter Variation.

c) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

stetig ist aber nicht von beschränkter Variation.

d) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x^2 \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

von beschränkter Variation ist.