Technische Universität Chemnitz WS 16/17
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Daniel Potts
Dr. Ralf Hielscher

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

http://www.tu-chemnitz.de/∼ rahi

Übungsblatt 5

Aufgabe 1: Welche der folgenden Funktionen sind wo komplex differenzierbar bzw. holomorph:

a) $f(x+\mathrm{i}y) = xy + \frac{\mathrm{i}}{2}(y^2 - x^2 + 20)$,

b) $f(x+\mathrm{i}y) = \mathrm{e}^y - \mathrm{i}\mathrm{e}^x$,

c) $f(x+\mathrm{i}y) = ax + \mathrm{i}by,\ a, b \in \mathbb{C}$,

d) $f(z) = z \operatorname{Re} z$,

e) $f(x+\mathrm{i}y) = x^2 - y^2 - 2x + 2\mathrm{i}y(x-1)$,

f) $f(x+\mathrm{i}y) = x^2 + y^2 + \mathrm{i}(x^2 - y^2)$.

Aufgabe 2: Folgende Aussagen sind zu beweisen oder durch ein Gegenbeispiel zu widerlegen.

a) Ist f eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet G in $\mathbb{C}$, dann hat die Menge der z in G mit $f(z) = \overline{z}$ keinen Häufungspunkt.

b) Ist f eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet G in $\mathbb{C}$, dann hat die Menge der z in G mit $f(z) = \overline{z}$ keinen inneren Punkt.

Aufgabe 3: Es sei $f : D \to \mathbb{C}$ in $a \in D$ komplex differenzierbar und $D^* = \{\overline{z}; z \in D\}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g : D^* \to \mathbb{C}, \quad g(z) = \overline{f(\overline{z})}$$

in $\overline{a}$ komplex differenzierbar ist und $\overline{f'(a)}$ die Ableitung $f'(\overline{a})$ ist.

Aufgabe 4: Sei $a \in \mathbb{C}$ und $a, b \in \mathbb{R}$.

a) In welchem Sinne gilt $(a^b)^c = a^{bc}$?

b) Welche Fehler stecken in folgendem *falschen Beweis*?

$$\text{Für alle } x \in \mathbb{R} \text{ gilt } \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x/2\pi} = \left(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}\right)^{(x/2\pi)} = 1^{x/2\pi} = 1.$$