TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
PROF. DANIEL POTTS
RALF HIELSCHER

WS16/17

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

http://www.tu-chemnitz.de/~rahi

Übungsblatt 4

Aufgabe 1: Skizzieren Sie für $a \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} a > 0$ die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

a) $M_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 - \operatorname{Re} z\}$,

b) $M_2 = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|\dfrac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}\right| = 2\right\}$,

c) $M_3 = \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2}\right\}$,

d) $M_4 = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|\dfrac{a - z}{\overline{a} + z}\right| < 1\right\}$.

Aufgabe 2:

a) Zeigen, dass für festes $y \in R$ die Menge $E = \{z = \cos(x + \mathrm{i}y); x \in [0, 2\pi)\}$ eine Ellipse mit den Brennpunkten $-1, 1$ ist. Bestimmen sie die Halbachsen a, b!

b) Zeigen, dass für festes $x \in R$ die Menge $H = \{z = \cos(x + \mathrm{i}y); y \in \mathbb{R}\}$ eine Hyperbel mit den Brennpunkten $-1, 1$ ist.

Aufgabe 3: Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Menge von komplexen Zahlen, $a \in D$ ein Häufungspunkt und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

a) f ist in a komplex differenzierbar mit der Ableitung $l \in \mathbb{C}$.

b) Es existiert eine in a stetige Funktion $\varphi : D \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(a) + (z - a)\varphi(z) \text{ und } \varphi(a) = l\,.$$

c) Es existiert eine in a stetige Funktion $\varrho : D \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(a) + (z - a) \cdot l + (z - a)\varrho(z) \text{ und } \varrho(a) = 0\,.$$

d) Definiert man $r : D \to \mathbb{C}$ durch $f(z) = f(a) + (z-a) \cdot l + r(z)$, so gilt

$$\lim_{z \to a} \frac{r(z) - r(a)}{z - a} = 0\,.$$

Aufgabe 4: Es sei $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Ferner sei $\xi \in S^1$ und $M = \{\xi^n; n \in \mathbb{Z}\} \subset S^1$. Zeigen Sie, dass M entweder endlich oder dicht in S^1 ist.