Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Daniel Potts
Dr. Ralf Hielscher

WS 16/17

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

http://www.tu-chemnitz.de/∼ rahi

Übungsblatt 11 - Maximumprinzip und Taylorentwicklung

Aufgabe 1: Wiederholen Sie das Maximumprinzip. Gilt eine entsprechende Aussage für das Minimum?

Aufgabe 2: Sei $R > 0$ und $f\colon B_R(0) \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\rho\colon [0, R) \to \mathbb{R}, \quad \rho(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)| \,.$$

streng monoton wachsend ist.

Aufgabe 3 (Identitätssatz): Seien $f, g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen auf einem zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

a) Gilt $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ für ein z_0 in Ω und alle $n = 0, 1, \ldots$, so stimmen f und g auf ganz Ω überein.

b) Stimmen f und g auf einer Menge $N = \{z \in \Omega \mid f(z) = g(z)\}$ überein, welche einen Häufungspunkt in Ω hat, so stimmen f und g auf ganz Ω überein.

Hinweis: Eine Menge Ω heißt zusammenhängen wenn es keine offenen und disjunkten Mengen $U, V \subset \Omega$ gibt mit $\Omega = U \cup V$.

Aufgabe 4 (Schwarzsches Lemma): Sei $f\colon K_1(0) \to K_1(0)$ eine holomorphe Abbildung der Einheitskreisscheibe in sich mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie:

a) Es gibt eine holomorphe Funktion $g\colon K_1(0) \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = zg(z)$ für alle $z \in K_1(0)$.

b) Es gilt $f'(0) = g(0)$ und $g(z) \le 1$ für alle $z \in K_1(0)$.

c) Es gilt $f'(0) \le 1$ und $|f(z)| \le |z|$ für alle $z \in K_1(0)$.

d) Ist $f'(0) = 1$ oder $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \neq 0$, so ist $f(z) = az$ für ein $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$.

e) Ist f biholomorph, d.h. f ist bijectiv und f^{-1} ist holomorph. Dann ist f eine Drehung.