TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
PROF. DR. DANIEL POTTS
DR. RALF HIELSCHER

WS 16/17

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

`http://www.tu-chemnitz.de/~ rahi`

Übungsblatt 10 - Verallgemeinerung und Umkehrung der Cauchyschen Integralformel

Aufgabe 1: Berechnen Sie die folgenden Integrale gegebenenfalls entlang der Kreise $C_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| = r\}$ im mathematisch positiven Sinn unter Verwendung der Cauchyschen Integralformel.

a) $\int_{C_1(z_0)} (z - z_0)^n \,\mathrm{d}z$,

b) $\displaystyle\oint_{C_2(i)} \frac{z+3}{z^2-1} \,\mathrm{d}z$,

c) $\displaystyle\oint_{C_{\frac{\pi}{2}}(1)} \frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z-\mathrm{i})^4} \,\mathrm{d}z$,

d) $\displaystyle\oint_{C_2(-2\mathrm{i})} \frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z-\mathrm{i})^4} \,\mathrm{d}z$,

e) $\displaystyle\oint_{C_1(0)} \frac{\sin^3 z}{(z-\pi/3)^2} \,\mathrm{d}z$,

f) $\displaystyle\oint_{C_2(0)} \frac{\sin^3 z}{(z-\pi/3)^2} \,\mathrm{d}z$,

g) $\displaystyle\oint_{C_2(0)} \frac{\ln z}{z^2+1} \,\mathrm{d}z$,

h) $\displaystyle\oint_{\partial B_1(1)} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n \,\mathrm{d}z$,

i) $\displaystyle\oint_{C_{180}(16-17i)} z^{17} \,\mathrm{d}z$.

Aufgabe 2 (Schwarzsches Spiegelunsprinzip): Sei $D \neq \emptyset$ ein zur reellen Achse symmetrisches Gebiet und seien

$$D_+ = \{z \in D \mid \mathrm{Im} z > 0\},\ D_- = \{z \in D \mid \mathrm{Im} z < 0\} \text{ und } D_0 = \{z \in D \mid \mathrm{Im} z = 0\}.$$

Ist $f\colon D_+ \cup D_0 \to \mathbb{C}$ stetig, $f|_{D_+}$ holomorph und $f(D_0) \subset \mathbb{R}$, dann ist die durch

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & z \in D_+ \cup D_0, \\ \overline{f(\overline{z})}, & z \in D_- \end{cases}$$

definierte Funktion holomorph.

Aufgabe 3: Zeigen Sie folgenden Satz: Sei $f_n\colon D \to \mathbb{C}$ eine Familie holomorpher Funktionen auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ mit $f_n \to f$ gleichmässig auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset D$. Dann ist f holomorph auf D.
Gibt es zu dieser Aussage eine analoge Aussage im Reellen?