

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

<http://www.tu-chemnitz.de/~potts>

Übungsblatt 9

Aufgabe 1:

Beweisen Sie: Seien f, g ganze Funktionen und für alle $z \in \mathbb{C}$ gelte $|f(z)| \leq |g(z)|$. Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = \lambda g(z)$.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Cauchy Integralformel:

$$1) \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+i} dz$$

$$2) \int_{|z+2i|=3} \frac{dz}{z^2 + \pi^2}$$

$$3) \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^4 - 1}$$

$$4) \int_{|z-3/2|=1} \frac{e^z}{z(z-1)^3} dz$$

$$5) \int_{|z|=3} \frac{e^{az}}{z^2(z^2 + 2z + 2)} dz$$

$$6) \int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^m}, \quad |a| < r < |b|, m, n \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Art der Singularitäten, Residuen und Hauptteile von

$$1) \frac{1 - \cos z}{z^2}$$

$$2) e^{1/z} + \frac{1}{z}$$

$$3) (z+2) \sin\left(\frac{1}{z+2}\right)$$

Aufgabe 4:

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

$$1) \int_{|z|=3} \frac{e^{zt}}{z^2(z^2 + 2z + 2)} dz$$

$$2) \int_{\Gamma} \frac{2 + 3 \sin \pi z}{z(z-1)^2} dz \quad \Gamma = \text{Rand des Quadrates mit den Ecken } \pm(3 \pm 3i)$$