

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

<http://www.tu-chemnitz.de/~potts>

Übungsblatt 8

Aufgabe 1:

Man bestimme die Konvergenzradien der Taylor-Reihen folgender gegebenenfalls stetig ergänzter Funktion zu den Entwicklungspunkten z_0 und z_1 , ohne die Reihen selbst zu berechnen:

$$f(z) = \frac{z^3 + 8}{z^2 - 2z + 2}, \quad z_0 = 0, \quad z_1 = -i.$$

Aufgabe 2:

Für die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}$$

sollen Laurententwicklungen für die Gebiete $|z| < 2$, $2 < |z| < 3$ und $|z| > 3$ um den Punkt $z_0 = 0$ angegeben werden.

Aufgabe 3:

Sei $0 \leq r < R$, so bezeichnen wir mit

$$K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$$

den Kreisring um z_0 mit innerem Radius r und äußerem Radius R . Dabei ist die Möglichkeit $R = +\infty$ zugelassen. Sei $f(z) := \frac{1}{z(z-i)^2}$. Berechnen Sie die Laurent-Entwicklung im Kreisring $K_{0,1}(0)$, $K_{1,\infty}(0)$ und $K_{0,1}(i)$.

Aufgabe 4:

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Cauchy Integralformel:

$$1) \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+i} dz$$

$$2) \int_{|z+2i|=3} \frac{dz}{z^2 + \pi^2}$$

$$3) \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^4 - 1}$$

$$4) \int_{|z-3/2|=1} \frac{e^z}{z(z-1)^3} dz$$

$$5) \int_{|z|=3} \frac{e^{az}}{z^2(z^2 + 2z + 2)} dz$$

$$6) \int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^m}, \quad |a| < r < |b|, m, n \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie die Art der Singularitäten, Residuen und Hauptteile von

$$1) \frac{1 - \cos z}{z^2}$$

$$2) e^{1/z} + \frac{1}{z}$$

$$3) (z+2) \sin\left(\frac{1}{z+2}\right)$$

Aufgabe 6:

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

$$1) \int_{|z|=3} \frac{e^{zt}}{z^2(z^2 + 2z + 2)} dz$$

$$2) \int_{\Gamma} \frac{2 + 3 \sin \pi z}{z(z-1)^2} dz \quad \Gamma = \text{Rand des Quadrates mit den Ecken } \pm(3 \pm 3i)$$