

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

<http://www.tu-chemnitz.de/~potts>

Übungsblatt 7

Aufgabe 1:

Man berechne die folgenden Kurvenintegrale gegebenenfalls unter Verwendung der Cauchyschen Integralformel. Die auftretenden Kurven sollen im mathematisch positiven Sinn durchlaufen werden.

$$1. \oint_{c_{1/2}} \frac{e^{2z}}{(z-i)^4} dz \quad \text{für} \quad c_1 : |z-1| = \frac{\pi}{2}, \quad c_2 : |z+2i| = 2,$$

$$2. \oint_{c_{1/2/3}} \frac{z+3}{z^2-1} dz \quad \text{für} \quad \begin{array}{l} c_1 : |z-1| = 1.9, \\ c_2 : |z-i| = 1.5, \\ c_3 : |z+1+i| = 1.1, \end{array}$$

$$3. \oint_{c_{1/2}} \frac{\sin^3 z}{(z-\pi/3)^2} dz \quad \text{für} \quad c_1 : |z| = 1, \quad c_2 : |z| = 2,$$

$$4. \oint_c \frac{\ln z}{z^2+1} dz \quad \text{für} \quad c : |z-1-i| = 1.414,$$

$$5. \oint_c z^{17} dz \quad \text{für} \quad c : |z-16+17i| = 180.$$

Aufgabe 3:

Sei C die positiv orientierte Kreislinie $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ und $f(z) = (z -$

$z_0)^n, n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie

$$\int_C f(z) dz = \begin{cases} 0, & \text{für } n \in \mathbb{Z}, n \neq -1, \\ 2\pi i, & \text{für } n = -1. \end{cases}$$

Aufgabe 4:

a) Berechnen Sie $\int_C e^z dz$ längs der Strecke von 1 nach i .

b) Berechnen Sie $\int_C \frac{dz}{z^2}$ längs des Streckenzuges C von 1 über $1 + i$ und $-1 + i$ nach -1 .

Aufgabe 5:

Sei f holomorph in einem Gebiet D , z ein beliebiger Punkt in D und die Kreislinie $K_r(z)$ sowie ihr Inneres ganz in D enthalten. Zeigen Sie, gilt

$$|f(\xi)| \leq M \text{ für alle } \xi \in K_r(z)$$

mit einer Konstanten $M > 0$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!M}{r^n}.$$