TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
DANIEL POTTS WISE15/16

# Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

http://www.tu-chemnitz.de/~potts

## Übungsblatt 5

**Aufgabe 1:**
Welche der folgenden Funktionen sind wo komplex differenzierbar bzw. holomorph:

1) $f(x+\mathrm{i}y) := xy + \frac{\mathrm{i}}{2}(y^2 - x^2 + 20)$ 2) $f(x+\mathrm{i}y) := \mathrm{e}^y - \mathrm{i}\mathrm{e}^x$

3) $f(x+\mathrm{i}y) := ax + \mathrm{i}by \ (a, b \in \mathbb{C})$ 4) $f(z) := z \operatorname{Re} z$

**Aufgabe 2:**
Ist die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(x+\mathrm{i}y) := x^2 - y^2 - 2x + 2\mathrm{i}y(x-1)$ komplex differenzierbar?

**Aufgabe 3:**
Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(x+\mathrm{i}y) := x^2 + y^2 + \mathrm{i}(x^2 - y^2)$. Man bestimme die Menge aller Punkte $z \in \mathbb{C}$, in denen $f$ komplex differenzierbar ist. Ist $f$ in einem Punkt $z \in \mathbb{C}$ holomorph?

**Aufgabe 4:**
Folgende Aussagen sind zu beweisen oder durch ein Gegenbeispiel zu widerlegen.

a) Ist $f$ eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet $G$ in $\mathbb{C}$, dann hat die Menge der $z$ in $G$ mit $f(z) = \overline{z}$ keinen Häufungspunkt.

b) Ist $f$ eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet $G$ in $\mathbb{C}$, dann hat die Menge der $z$ in $G$ mit $f(z) = \overline{z}$ keinen inneren Punkt.

**Aufgabe 5:**
Es sei $f : D \to \mathbb{C}$ in $a \in D$ komplex differenzierbar und $D^* = \{\overline{z}; z \in D\}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g : D^* \to \mathbb{C}, \;\; g(z) = \overline{f(\overline{z})}$$

in $\overline{a}$ komplex differenzierbar ist und $\overline{f'(a)}$ die Ableitung $f'(\overline{a})$ ist.

**Aufgabe 6:**
Man untersuche die folgenden komplexen Funktionen $f$ auf Stetigkeit und komplexe Differenzierbarkeit. Gegebenenfalls bestimme man die Ableitung in den Punkten, in denen $f$ komplex differenzierbar ist.

a) $f(z) = z\mathrm{Re}(z)$, (b) $f(z) = \overline{z}$,

(c) $f(z) = z\overline{z}$ (d) $f(z) = z/\overline{z}, z \neq 0$.

**Aufgabe 7:**

a) In welchem Sinne gilt $(a^b)^c = a^{bc}$?

b) Welche Fehler stecken in folgendem *falschen Beweis*?

$$\text{Für alle } x \in \mathbb{R} \text{ gilt } \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x/2\pi} = \left(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}\right)^{(x/2\pi)} = 1^{x/2\pi} = 1\,.$$