

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

<http://www.tu-chemnitz.de/~potts>

Übungsblatt 4

Aufgabe 1:

Zeigen Sie: Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und sei $z_n = x_n + iy_n$ mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \end{cases}.$$

Aufgabe 2:

Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Menge von komplexen Zahlen, $a \in D$ ein Häufungspunkt und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) f ist in a komplex differenzierbar mit der Ableitung $l \in \mathbb{C}$.

(b) Es existiert eine in a stetige Funktion $\varphi : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(a) + (z - a)\varphi(z) \text{ und } \varphi(a) = l.$$

(c) Es existiert eine in a stetige Funktion $\varrho : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(a) + (z - a) \cdot l + (z - a)\varrho(z) \text{ und } \varrho(a) = 0.$$

(d) Definiert man $r : D \rightarrow \mathbb{C}$ durch $f(z) = f(a) + (z - a) \cdot l + r(z)$, so gilt

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{r(z) - r(a)}{z - a} = 0.$$

Aufgabe 3:

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

1. $M_1 = \{z; |z| < 1 - \operatorname{Re} z\}$,

2. $M_2 = \left\{z; \left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 2\right\}$,

3. $M_3 = \left\{z; \operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{1}{2}\right\}$,

4. $M_4 = \left\{z; \left|\frac{a-z}{\bar{a}+z}\right| < 1\right\}, \operatorname{Re} a > 0$.

Aufgabe 4:

Es sei $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Ferner sei $\xi \in S^1$ und $M = \{\xi^n; n \in \mathbb{Z}\} \subset S^1$. Zeigen Sie, dass M entweder endlich oder dicht in S^1 ist.