

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

<http://www.tu-chemnitz.de/~potts>

Übungsblatt 3

Aufgabe 1:

Entwickeln Sie die folgenden Funktionen $f(z)$ in Potenzreihen um z_0 :

1) $f(z) := \frac{3z^2+1}{z+1}, \quad z_0 = 2 \text{ und } z_0 = i$

2) $f(z) := \frac{z^2}{(z+i)(z-i)^2}, \quad z_0 = 0$

3) $f(z) := \sin^2 z, \quad z_0 = 0$

4) $f(z) := \cos(z^2 - 1), \quad z_0 = 0$

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, dass die komplexe Konjugierung $f(z) := \bar{z}$ in \mathbb{C} nirgends komplex differenzierbar ist.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!}$ für alle $c \in \mathbb{C}$ konvergiert.

Aufgabe 4:

Untersuchen Sie die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ mit $f_n(z) = \frac{\cos nz}{n^2}$ auf gleichmäßige Konvergenz

a) auf $X = \mathbb{R}$.

b) auf $X = \mathbb{C}$.

Aufgabe 5:

- a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (\cos n) \cdot z^n$.
- b) Gegeben sei die Potenzreihe $\sum_0^{\infty} a_n z^n$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und

$$\lim_n \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = r.$$

Zeigen Sie: Die Reihe hat den Konvergenzradius r .

Aufgabe 6:

Zeigen Sie, dass für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

- (i) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$
- (ii) $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$
- (iii) $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$
- (iv) $\sinh(-z) = -\sinh z$ **und** $\cosh(-z) = \cosh z$

gilt.

Aufgabe 7:

Zeigen Sie, dass für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

- (i) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
- (ii) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$
- (iii) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$
- (iv) $\sin(-z) = -\sin z$ **und** $\cos(-z) = \cos z$

gilt.