TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
DANIEL POTTS WS08/09

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

http://www.tu-chemnitz.de/~potts

Übungsblatt 8

Aufgabe 1:
Man bestimme die Konvergenzradien der Taylor-Reihen folgender gegebenenfalls stetig ergänzter Funktion zu den Entwicklungspunkten z_0 und z_1, ohne die Reihen selbst zu berechnen:

$$f(z) = \frac{z^3+8}{z^2-2z+2}\,, \quad z_0 = 0\,, \quad z_1 = -\mathrm{i}\,.$$

Aufgabe 2:
Für die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}$$

sollen Laurententwicklungen für die Gebiete $|z| < 2, 2 < |z| < 3$ und $|z| > 3$ um den Punkt $z_0 = 0$ angegeben werden.

Aufgabe 3:
Sei $0 \le r < R$, so bezeichnen wir mit

$$K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \, : \, r < |z - z_0| < R\}$$

den Kreisring um z_0 mit innerem Radius r und äußerem Radius R. Dabei ist die Möglichkeit $R = +\infty$ zugelassen. Sei $f(z) := \dfrac{1}{z(z-\mathrm{i})^2}$. Berechnen Sie die Laurent-Entwicklung im Kreisring. $K_{0,1}(0)$, $K_{1,\infty}(0)$ und $K_{0,1}(\mathrm{i})$.

Aufgabe 4:
Beweisen Sie: Seien f, g ganze Funktionen und für alle $z \in \mathbb{C}$ gelte $|f(z)| \le |g(z)|$. Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = \lambda g(z)$.

Aufgabe 5:
Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Cauchy Integralformel:

1) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z$ 2) $\displaystyle\int\limits_{|z+2\mathrm{i}|=3} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+\pi^2}$

3) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{z^4-1}$ 4) $\displaystyle\int\limits_{|z-3/2|=1} \frac{e^z}{z(z-1)^3}\mathrm{d}z$

5) $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{e^{az}}{z^2(z^2+2z+2)}\mathrm{d}z$

6) $\displaystyle\int\limits_{|z|=r} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n(z-b)^m}, \quad |a|<r<|b|, m,n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 6:
Bestimmen Sie die Art der Singularitäten, Residuen und Hauptteile von

1) $\displaystyle\frac{1-\cos z}{z^2}$ 2) $\mathrm{e}^{1/z}+\dfrac{1}{z}$

3) $\displaystyle(z+2)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right)$

Aufgabe 7:
Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

1) $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{\mathrm{e}^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\mathrm{d}z$

2) $\displaystyle\int\limits_{\Gamma} \frac{2+3\sin\pi z}{z(z-1)^2}\mathrm{d}z$ Γ= Rand des Quadrates mit den Ecken $\pm(3\pm 3\mathrm{i})$