

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

<http://www.tu-chemnitz.de/~potts>

Übungsblatt 6

Aufgabe 1:

Berechnen Sie

a) $\oint_c \operatorname{Im} z \, dz$, $c(\varphi) = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$,

b) $\int_c z \, dz$, $c(t) = (i-1)t$, $0 \leq t \leq 1$,

c) $\int_c z \, dz$, $c(t) = \begin{cases} -t & , 0 \leq t \leq 1, \\ -1 + (t-1)i & , 1 \leq t \leq 2, \end{cases}$

d) $\oint_c \bar{z} \, dz$, $c(t) = \begin{cases} t & , -1 \leq t \leq 1, \\ e^{i\pi(t-1)} & , 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$

Aufgabe 2:

a) Berechnen Sie $\int_c \frac{1}{z} \, dz$ für $c(t) = 1 + t(i-1)$ mit $0 \leq t \leq 1$

(i) direkt und unter (ii) Verwendung einer Stammfunktion.

b) Berechnen Sie mit Hilfe von a)

(i) $\int_0^1 \frac{1}{(t-1)^2 + t^2} \, dt$ und (ii) $\int_0^1 \frac{2t-1}{(t-1)^2 + t^2} \, dt$.

Aufgabe 3:

Berechne Sie direkt und mit Hilfe einer Stammfunktion

1. $\int_c e^z dz$ für $c(t) = (1+i)t$ mit $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$,

2. $\int_c \frac{1}{z^2} dz$ für $c(t) = e^{it}$ mit $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$,

3. $\int_c \cos z dz$ für $c(t) = it$ mit $0 \leq t \leq 1$ und

4. $\int_c z^3 + 1 dz$ für $c(t) = e^{it}$ mit $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 4:Berechnen Sie die folgenden Integrale längs der angegebenen Wege γ :

a) $\int_\gamma |z| dz$, γ läuft geradlinig oder auf dem Kreisrand von $-i$ nach i

b) $\int_\gamma |z|^2 dz$, $\gamma : z(t) = a \cos t + ib \sin t$ $t \in [0, 2\pi]$, $a, b > 0$

c) $\int_\gamma \frac{z}{(z^2 + 4)^2} dz$, $\gamma = \overline{z_1, z_2}$ (= Strecke von z_1 nach $z_2 \in \mathbb{C}$)

d) $\int_\gamma \cos z d\bar{z}$, γ achsenparalleler Rechtwinkelzug von 0 nach $u + iv$