

## Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

<http://www.tu-chemnitz.de/~potts>

### Übungsblatt 3

#### Aufgabe 1:

Entwickeln Sie die folgenden Funktionen  $f(z)$  in Potenzreihen um  $z_0$ :

1)  $f(z) := \frac{3z^2+1}{z+1}, \quad z_0 = 2 \text{ und } z_0 = i$

2)  $f(z) := \frac{z^2}{(z+i)(z-i)^2}, \quad z_0 = 0$

3)  $f(z) := \sin^2 z, \quad z_0 = 0$

4)  $f(z) := \cos(z^2 - 1), \quad z_0 = 0$

#### Aufgabe 2:

Zeigen Sie, dass die komplexe Konjugierung  $f(z) := \bar{z}$  in  $\mathbb{C}$  nirgends komplex differenzierbar ist.

#### Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!}$  für alle  $c \in \mathbb{C}$  konvergiert.

#### Aufgabe 4:

Untersuchen Sie die Funktionenreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  mit  $f_n(z) = \frac{\cos nz}{n^2}$  auf gleichmäßige Konvergenz

a) auf  $X = \mathbb{R}$ .

b) auf  $X = \mathbb{C}$ .

**Aufgabe 5:**

- a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} (\cos n) \cdot z^n$ .
- b) Gegeben sei die Potenzreihe  $\sum_0^{\infty} a_n z^n$  mit  $a_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  und

$$\lim_n \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = r.$$

Zeigen Sie: Die Reihe hat den Konvergenzradius  $r$ .

**Aufgabe 6:**

Zeigen Sie, dass für  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

- (i)  $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$
- (ii)  $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$
- (iii)  $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$
- (iv)  $\sinh(-z) = -\sinh z$  **und**  $\cosh(-z) = \cosh z$

gilt.

**Aufgabe 7:**

Zeigen Sie, dass für  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

- (i)  $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
- (ii)  $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$
- (iii)  $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$
- (iv)  $\sin(-z) = -\sin z$  **und**  $\cos(-z) = \cos z$

gilt.