

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

<http://www.tu-chemnitz.de/~potts>

Übungsblatt 2

Aufgabe 1:

Beweisen Sie für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ die Dreiecksungleichung

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

sowie

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow z_1 = cz_2, \text{ mit } c \geq 0.$$

Aufgabe 2:

a) Gegeben sei $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \neq 0$. Gesucht werden alle $w = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$ mit $w^n = z, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

b) Berechnen Sie alle $w \in \mathbb{C}$ mit $w^2 = i$.

Aufgabe 3:

- (a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der Abbildung $w = \cos z$.
(b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $\cos z \in \mathbb{R}, \cos z \in [-1, 1], \cos z = 1$?
(c) Bestimmen Sie die Perioden von $\cos z$.
- Analog für die Sinushyperbolicus.
- Analog für den Tangens.

Aufgabe 4:

Die Exponentialfunktion e^z definieren wir für beliebige komplexe $z = x + iy$ durch

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Zeigen Sie, dass die Definition äquivalent zu

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

ist.

Aufgabe 5:

Wiederholen Sie: Häufungswert einer Folge, absolut konvergent, bedingt konvergent, divergent, Majorantenkriterium, Wurzelkriterium, Quotientenkriterium.