

TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

MASTERARBEIT

Approximation mannigfaltigkeitswertiger Funktionen

Laura Lippert

Chemnitz, den 27.04.2020

Betreuer: Dr. Ralf Hielscher
Zweitgutachter: Prof. Dr. Daniel Potts

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Quasiinterpolation	6
2.1	Grundlegende Notationen und Funktionenräume	6
2.2	Lineare Quasiinterpolation	6
3	Mannigfaltigkeitswertige Approximation	16
3.1	Der Projektionsoperator	17
3.2	Die Approximationsordnung	20
3.3	Funktionen mit Werten auf der Sphäre	22
3.4	Die Ableitung des Projektionsoperators	29
3.5	Der Approximationsfehler für allgemeine Mannigfaltigkeiten	32
3.6	Funktionen mit Werten auf einer Kurve in \mathbb{R}^2	40
3.7	Funktionen mit Werten auf einer Kurve in \mathbb{R}^d	43
3.8	Funktionen mit Werten im zweidimensionalen projektiven Raum	45
4	Zusammenfassung	52
A	Matrixnormen	54
	Literaturverzeichnis	56

1 Einleitung

Mannigfaltigkeitswertige Daten kommen in vielen Gebieten vor, zum Beispiel in der Kristallographie, in der Robotik, im Gebiet der virtuellen Realität und in der Kartographie. Viele Methoden der Approximationstheorie, der Optimierung oder der Statistik setzen Daten aus einem euklidischen Vektorraum voraus. Dabei benutzt man häufig die Vektorraumeigenschaften: für Interpolationen, um partielle Ableitungen zu definieren, um Optimalitätsbedingungen erster Art zu formulieren oder um ein Gradientenverfahren durchzuführen. Eine Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum, der lokal in jedem Punkt dem euklidischen Raum gleicht. Man hat also diese Vektorraumeigenschaften nicht. Eine Möglichkeit lineare Methoden auf Mannigfaltigkeiten zu verallgemeinern, besteht darin, Einbettungen der Mannigfaltigkeit M in euklidische Räume zu betrachten, also Abbildungen

$$\mathcal{E} : M \rightarrow \mathbb{R}^d,$$

deren Einschränkungen auf das Bild $\mathcal{E}(M)$ Homöomorphismen sind. In diesen euklidischen Räumen kann man die linearen Algorithmen durchführen und anschließend wieder auf die Mannigfaltigkeit projizieren. Der Einbettungssatz von Whitney sichert, dass jede Mannigfaltigkeit in einen euklidischen Raum eingebettet werden kann.

In dieser Arbeit wollen wir uns mit der Approximation von Funktionen beschäftigen, deren Funktionswerte auf einer Mannigfaltigkeit M liegen. Wie in [3, 4] betrachten wir die Idee, Interpolationsoperatoren in \mathbb{R}^d zu verallgemeinern, indem wir die Mannigfaltigkeit M in einen linearen Raum \mathbb{R}^d einbetten. In diesem linearen Raum können wir interpolieren und erhalten anschließend mittels Projektion auf das Bild der Einbettung eine M -wertige Funktion. Die Projektion eines Punktes $x \in \mathbb{R}^d$ auf M können wir kanonisch als den Punkt mit minimalem Abstand beschreiben. Es bleibt zu zeigen, dass das Minimum immer existiert. Wir werden sehen, dass die Projektion

$$P_M : U \rightarrow M, P_M(y) = \underset{u \in U}{\operatorname{argmin}} \|y - x\| \quad (1.1)$$

nicht immer auf ganz \mathbb{R}^d , sondern in einer Umgebung U von $\mathcal{E}(M)$ definiert ist. Wir wollen untersuchen, wie diese Umgebung aussieht. Außerdem wollen wir die Fehler der Interpolation auf M mit den Fehlern bei der linearen Interpolation vergleichen. Wir wollen nicht nur die Approximation einer M -wertigen Funktion betrachten, sondern auch untersuchen, wie man die Ableitung einer M -wertigen Funktion mit dieser nichtlinearen Interpolation approximieren kann. Dazu müssen wir die Ableitung der Projektion P_M untersuchen.

Um dieses Ziel zu erreichen, ist diese Arbeit wie folgt aufgebaut. In Kapitel 2 betrachten wir als Beispiel für einen reellwertigen Interpolationsoperator den in [2, 4] eingeführten Quasiinterpolationsoperator $Q_{\mathbb{R}^d}$, der Funktionen $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^d$ mithilfe von B-Splines approximiert. Wir werden den bei dieser Approximation entstehenden Fehler $\|Q_{\mathbb{R}^d} f - f\|$ in Satz 2.11 abschätzen. Diese Abschätzung zeigt, dass man Quasiinterpolationsoperatoren beliebiger Konvergenzordnung konstruieren kann. Ebenso werden wir falls $f \in C^1$ ist, den Fehler bei der Approximation der Ableitung $\|(Q_{\mathbb{R}^d} f)' - f'\|$ in Satz 2.13 abschätzen.

In Kapitel 3 wollen wir untersuchen, wie man mithilfe eines linearen Interpolationsoperators einen Interpolationsoperator für mannigfaltigkeitswertige Funktionen erhält. In Abschnitt 3.1 geben wir eine kurze Einführung in die Theorie der Mannigfaltigkeiten. Wir definieren Tangential- und Normalenräume und stellen fest, dass die Projektion P_M auf die Mannigfaltigkeit erst einmal

in einer Umgebung von $\mathcal{E}(M)$ definiert sein muss. In Satz 3.12 zeigen wir, dass es zu jeder Mannigfaltigkeit eine Umgebung U gibt, in der P_M aus Gleichung (1.1) wohldefiniert ist. In Satz 3.13 beschreiben wir die Projektion als Verknüpfung der Abbildung in das Normalenbündel verknüpft mit einer orthogonalen Projektion. Diese Beschreibung der Projektion P_M als Verknüpfung zweier glatter Funktionen ermöglicht es uns, die Ableitung der Projektion zu berechnen.

In [3] wurde beschrieben, wie sich die Eigenschaften der linearen Interpolante auf die Interpolante im M -wertigen Fall übertragen. In Abschnitt 3.2 werden wir diese Ideen übernehmen, die allgemein für jeden Interpolationsoperator gelten und nicht nur für den vorher beschriebenen Quasiinterpolationsoperator. Der Fehler bei der nichtlinearen Approximation lässt sich mit Satz 3.15 leicht abschätzen. Will man zusätzlich die Ableitung einer Funktion approximieren, sind die Abschätzungen komplizierter. In Satz 3.17 beweisen wir eine Abschätzung für den Fehler bei der Approximation der Ableitung mithilfe der nichtlinearen Interpolation. Die darin vorkommenden Konstanten hängen stark von der Mannigfaltigkeit M , der Einbettung \mathcal{E} und der Umgebung U ab, in Kapitel 3.7 werden wir anhand des Beispiels einer Kurve sehen, dass die Konstanten im Wesentlichen von der Krümmung der Kurve abhängen. Der Satz ist Grundlage für das weitere Vorgehen dieser Arbeit. Ziel ist es, die Konstanten aus diesem Satz allgemein und an speziellen Beispielen zu berechnen.

Dazu betrachten wir in Abschnitt 3.3 zunächst das Beispiel der Sphäre $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$. In diesem Fall lassen sich die Fehlerabschätzungen der nichtlinearen Interpolation einfach beschreiben. In Satz 3.23 schätzen wir den Fehler der Quasiinterpolation für S^{d-1} -wertige Funktionen ab und sehen, dass die Konvergenzraten von der linearen Quasiinterpolation übernommen werden. Dieses theoretische Resultat illustrieren wir am Ende von Abschnitt 3.3 mit numerischen Experimenten.

In Abschnitt 3.4 beschäftigen wir uns mit der Ableitung der Projektion P_M . Nachdem wir Differentiale für mannigfaltigkeitswertige Funktionen einführen, berechnen wir die Ableitung von P_M in Satz 3.30 für Werte in M mithilfe des Tangentialraumes. Der Satz 3.31 berechnet die Norm der Ableitung von P_M an Punkten in M , sodass wir eine Konstante aus Satz 3.17 für allgemeine Mannigfaltigkeiten gegen 1 abschätzen können.

Die andere Konstante aus Satz 3.17 lässt sich nicht einfach beschreiben, wie wir in Abschnitt 3.5 sehen werden, da man insbesondere die Jacobi-Matrix der Abbildung P_M für Punkte außerhalb von M beschreiben muss. Dennoch können wir in Satz 3.37 ein lineares Gleichungssystem aufstellen, welches diese Jacobi-Matrix als Lösung hat. Wenn wir die Normalenvektoren geschickt wählen, können wir mithilfe von Satz 3.40 die Konstante aus Satz 3.17 abschätzen.

Nach den allgemeinen Betrachtungen untersuchen wir in Abschnitt 3.6 den Fall, dass die Mannigfaltigkeit eine Kurve im zweidimensionalen euklidischen Raum ist. Mithilfe von Satz 3.45 können wir für diesen Fall die Konstante aus Satz 3.17 bestimmen und somit die Fehlerabschätzungen der Interpolation auf M vervollständigen. In Abschnitt 3.7 sehen wir, dass wir diese Überlegungen auch auf Kurven im d -dimensionalen Raum verallgemeinern können. Die Größe der Konstanten wird im Wesentlichen durch die Krümmung der Kurve bestimmt, welche von der Einbettung der Kurve in den linearen Raum abhängig ist. Die Größe der Umgebung U hängt auch von der Krümmung der Kurve ab. Je größer die Krümmung ist, desto kleiner kann die Umgebung U gewählt werden, in der die Projektion P_M wohldefiniert ist.

Am Ende in Abschnitt 3.8 untersuchen wir noch ein Beispiel einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit, den projektiven Raum. Dieser lässt sich kanonischerweise in den \mathbb{R}^9 einbetten, wobei sich bei dieser Einbettung die Projektion P_M leicht berechnen lässt. Dabei sehen wir, dass wir die Abschätzung der Konstanten durch geschickte Wahl der Umgebung U , der Normalenvektoren,

aber auch der Einbettung \mathcal{E} verändern können. In Satz 3.50 berechnen wir für diese Mannigfaltigkeit die Konstante aus Satz 3.17, sodass wir auch in diesem Fall die Fehler der nichtlinearen Interpolation durch die Fehler der linearen Interpolation abschätzen können.

2 Quasiinterpolation

In diesem Kapitel führen wir zunächst grundlegende Notationen und Funktionenräume ein. In Abschnitt 2.2 werden wir die klassische Theorie von Quasiinterpolation von periodischen Funktionen auf einem regulären Gitter betrachten. Dann werden wir die Fehler der Quasiinterpolation abschätzen. In Abschnitt 3 werden wir dann untersuchen, wie man allgemeine Interpolation auf den nichtlinearen Fall mit mannigfaltigkeitswertigen Funktionen erweitern kann.

2.1 Grundlegende Notationen und Funktionenräume

Wir betrachten Mannigfaltigkeiten, die implizit gegeben sind durch

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : g(x) = 0 \in \mathbb{R}^D \right\},$$

wobei

$$g(x) = (g^1(x), \dots, g^D(x)) \in \mathbb{R}^D$$

mit $g^i \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, D\}$. Das bedeutet, dass die Mannigfaltigkeit in den euklidischen Raum \mathbb{R}^d eingebettet ist.

Wir führen im Folgenden die notwendigen Funktionenräume ein, mit denen wir arbeiten.

Definition 2.1. Sei $\mathbb{T} = (0, 1]$ der eindimensionale Torus. Für $d \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ definieren wir die **periodischen Sobolev-Räume**

$$W^{m,p}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^d) := \left\{ u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^d : \|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^d)} < \infty \right\},$$

wobei

$$\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^d)} := \|u\|_{L^p(\mathbb{T}, \mathbb{R}^d)} + \sum_{l=1}^m \left\| \frac{d^l}{dx^l} u \right\|_{L^p(\mathbb{T}, \mathbb{R}^d)}.$$

Für $m > \frac{1}{p}$ definieren wir

$$W^{m,p}(\mathbb{T}, M) := \{u \in W^{m,p}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^d) : u(x) \in M \text{ für alle } x \in \mathbb{T}\}.$$

Den Raum der stetigen Funktionen auf \mathbb{T} in \mathbb{R}^d bezeichnen wir mit $C(\mathbb{T}, \mathbb{R}^d)$ und genauso schreiben wir $C(\mathbb{T}, M)$ für stetige M -wertige Funktionen.

Wir benutzen außerdem ein paar diskrete Analogien. Zur Vereinfachung der Schreibweise schreiben wir für $n \in \mathbb{N}$

$$[n] = \{0, \dots, n-1\}.$$

Für $d \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $\ell([n], \mathbb{R}^d)$ den Raum von allen Funktionen $f : [n] \rightarrow \mathbb{R}^d$.

2.2 Lineare Quasiinterpolation

Zunächst wollen wir uns mit den Grundlagen von Quasiinterpolation für periodische Funktionen auf einem regulären Gitter befassen. Im Gegensatz zur Interpolation nimmt hier die Interpolierende an den Stützstellen nicht zwingend den exakten Wert der zu interpolierenden Funktion an, sondern ist für Polynome bis zu einem gewissen Grad exakt. Das heißt, wir wollen einen Operator Q erzeugen, sodass $Q(p) = p$ für alle Polynome p vom Grad kleiner als g . Dazu benutzen wir

eine Basisfunktion $\Phi(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mithilfe deren Translaten wir eine Funktion f approximieren wollen. Dazu brauchen wir eine polynomreproduzierende Eigenschaft. Wir werden zeigen, dass die kardinalen B-Splines $B_m(x)$ diese polynomreproduzierende Eigenschaft erfüllen und somit $\Phi(x) = B_m(x)$ wählen.

Annahme 2.2. Für $g \in \mathbb{N}$ nehmen wir an, dass es eine Funktion $\Phi(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger und eine Folge $\Lambda = (\lambda_k)_{k=-S}^S$ gibt, sodass die polynomreproduzierende Eigenschaft erfüllt ist. Also, dass gilt

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k=-S}^S \lambda_k u(i-k) \Phi(x-i) = u(x) \text{ für alle } u \in \Pi_g, \quad (2.1)$$

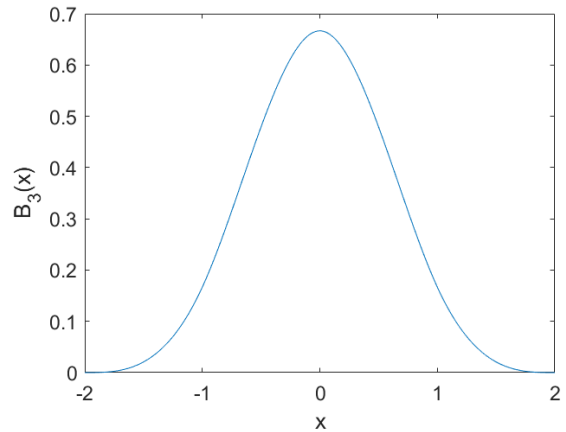
wobei Π_g alle Polynome vom Grad kleiner als g bezeichne.

Beispiel 2.3. Wir definieren die kardinalen B-Splines, also stückweise polynomiale Funktionen, rekursiv durch

$$B_0(x) = \begin{cases} 1 & -0.5 \leq x < 0.5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \text{ und } B_k(x) = \int_{x-1/2}^{x+1/2} B_{k-1}(y) dy.$$

Für $k = 3$ bedeutet das konkret

$$B_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x^3 + x^2 + 2x + \frac{4}{3} & x \in [-2, -1), \\ -\frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{2}{3} & x \in [-1, 0), \\ \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{2}{3} & x \in [0, 1), \\ -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - 2x + \frac{4}{3} & x \in [1, 2), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



Man sieht mit Induktion direkt, dass der Träger von $B_m(x)$ gerade $(-\frac{m+1}{2}, \frac{m+1}{2})$ ist. Für eine positive ganze Zahl m wollen wir als Basisfunktion $\Phi = B_m$ wählen. Dazu benötigen wir noch die Folge Λ , sodass Eigenschaft (2.1) erfüllt ist. Dazu benutzen wir eine Eigenschaft der kardinalen B-Splines:

Lemma 2.4. Für die kardinalen B-Splines aus Beispiel 2.3 gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} B_m(x+i) = 1.$$

Insbesondere gilt

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} B_m(i) = 1.$$

Beweis. Wir beweisen das mithilfe von Induktion. Für $m = 0$ gilt die Gleichung, dann hat die Summe nur genau einen Summanden und $B_0(x) = 1$ für $x \in [-0.5, 0.5)$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{Z}} B_m(x+i) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{x+i-1/2}^{x+i+1/2} B_{m-1}(y) dy = \int_{\mathbb{R}} B_{m-1}(y) dy \\ &= \int_0^1 \sum_{i \in \mathbb{Z}} B_{m-1}(y+i) dy = 1. \end{aligned} \quad \square$$

Mithilfe dieser Eigenschaft lässt sich die polynomreproduzierende Eigenschaft aus Annahme 2.2 wie in folgendem Lemma schreiben.

Lemma 2.5. *Die polynomreproduzierende Eigenschaft aus Annahme 2.2 ist für die kardinalen B-Splines äquivalent zu*

$$\sum_{i=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} B_m(i) \sum_{k=-S}^S \lambda_k (i-k)^r = \begin{cases} 1 & r = 0 \\ 0 & r \in \{1, \dots, m\} \end{cases}. \quad (2.2)$$

Es reicht also aus, die Eigenschaft an der Stelle $x = 0$ nachzuweisen, falls gilt $\sum_{k=-S}^S \lambda_k = 1$.

Beweis. Die eine Richtung ist klar, denn aus Gleichung (2.1) folgt Gleichung (2.2) mit $u(x) = x^r$ an der Stelle $x = 0$. Jetzt zur anderen Richtung. Da die Monome eine Basis der Polynome bilden, reicht es aus, wenn die Gleichung (2.1) für die Monome gilt,

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k=-S}^S \lambda_k (i-k)^r B_m(x-i) = x^r \text{ für } r \leq m. \quad (2.3)$$

Es reicht aus, diese Gleichung für $x = 0$ zu zeigen: Für $r = 0$ sind die beiden Gleichungen identisch. Wenn die Gleichung (2.2) für $r \geq 1$ gilt, folgen mithilfe von Lemma 2.4 auch die folgenden Gleichungen, denn die kardinalen B-Splines sind gerade Funktionen:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{Z}} B_m(i) \sum_{k=-S}^S \lambda_k \binom{r}{l} (i-k)^l &= 0, \text{ für } 0 < l \leq r \\ \sum_{i \in \mathbb{Z}} B_m(i) \sum_{k=-S}^S \lambda_k \binom{r}{l} (i-k)^l x^{r-l} &= 0, \\ \sum_{i \in \mathbb{Z}} B_m(i) \sum_{k=-S}^S \lambda_k \left(\sum_{l=0}^r \binom{r}{l} (i-k)^l x^{r-l} \right) &= x^r, \\ \sum_{i \in \mathbb{Z}} B_m(i) \sum_{k=-S}^S \lambda_k (x+i-k)^r &= x^r, \\ \sum_{i-x \in \mathbb{Z}} B_m(x-i) \sum_{k=-S}^S \lambda_k (i-k)^r &= x^r. \end{aligned}$$

Damit gilt Gleichung (2.1) für alle ganzen Zahlen x und für alle Polynome $u \in \Pi_d$. Die Summe $\sum_{k=-S}^S \lambda_k (i-k)^r$ ist für alle $r \leq m$ ein Polynom in i vom Grad höchstens m . Die linke Seite von Gleichung (2.3) hat also die Form $\sum_{i \in \mathbb{Z}} p(i) B_m(x-i)$. Nach Theorem 4.12. in [2] ist dann die kardinale Splinefunktion, also die Summe auf der linken Seite von (2.3), ein Polynom vom Grad höchstens m . Die rechte Seite x^r ist auch ein Polynom vom Grad höchstens m . Da Polynome vom Grad m durch Werte an $m+1$ Stellen eindeutig beschrieben sind und wir die Gleichung (2.3) für alle ganzen Zahlen x gezeigt haben, gilt die Gleichung auch an allen Stellen $x \in \mathbb{R}$, wenn sie für $x = 0$ gilt.

Da $B_m(x)$ einen kompakten Träger hat, ist die Summe endlich und an der Stelle $x = 0$ bedeutet Gleichung (2.1):

$$\sum_{i=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} B_m(-i) \sum_{k=-S}^S \lambda_k (i-k)^r = \begin{cases} 1 & r = 0 \\ 0 & r \in \{1, \dots, m\} \end{cases}.$$

Aufgrund ihrer Definition sind die kardinalen B-Splines symmetrisch zur y -Achse, also $B_m(x) = B_m(-x)$. Die Bedingung (2.1) kann somit geschrieben werden als

$$\sum_{i=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} B_m(i) \sum_{k=-S}^S \lambda_k (i-k)^r = \begin{cases} 1 & r = 0 \\ 0 & r \in \{1, \dots, m\} \end{cases}. \quad (2.4)$$

Damit ist die polynomreproduzierende Eigenschaft äquivalent zu Gleichung (2.2). \square

Satz 2.6. *Für ungerades $m \in \mathbb{N}$ sei $\Phi = B_m(x)$ der kardinale B-Spline, definiert in Beispiel 2.3. Dann existiert eine Folge Λ , sodass die polynomreproduzierende Eigenschaft 2.2 vom Grad $g = m + 1$ erfüllt ist.*

Beweis. Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$N_m(z) := \sum_{k=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} B_m(k) z^k, \\ D(z) := 1 - N_m(z),$$

was jeweils Polynome in z mit Potenzen von $-\frac{(m-1)}{2}$ bis $\frac{(m-1)}{2}$ sind. Wir summieren Potenzen von $D(z)$ von 0 bis $\frac{(m-1)}{2}$ und bekommen so ein Polynom in z mit Potenzen von $-\frac{(m-1)^2}{4}$ bis $\frac{(m-1)^2}{4}$. Die jeweiligen Koeffizienten vor z^k bezeichnen wir mit λ_k ,

$$\Lambda(z) := \sum_{k=-(m-1)^2/4}^{(m-1)^2/4} \lambda_k z^k = \sum_{l=0}^{(m-1)/2} (D(z))^l. \quad (2.5)$$

Da gilt $\sum_{i \in \mathbb{Z}} B_m(i) = 1$, gilt mit diesen Definitionen auch $\sum_{k=-S}^S \lambda_k = 1$, indem man $z = 1$ einsetzt. Wir können somit Lemma 2.5 anwenden.

Da $B_m(k)$ symmetrisch ist, ist auch Λ symmetrisch, also $\lambda_k = \lambda_{-k}$. Deswegen reicht es wegen Lemma 2.5, für die kardinalen B-Splines B_m Folgendes statt der Annahme 2.2 zu zeigen.

$$\sum_{i=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} B_m(i) \sum_{k=-S}^S \lambda_k (i+k)^r = \begin{cases} 1 & r = 0 \\ 0 & r \in \{1, \dots, m\} \end{cases}. \quad (2.6)$$

Für den weiteren Beweis müssen wir zeigen, dass gilt

$$\frac{d^r}{dz^r} (N_m(z) \Lambda(z))|_{z=1} = \sum_{i=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} B_m(i) \sum_{j=-(m-1)^2/4}^{(m-1)^2/4} \lambda_j (i+j)^r \quad (2.7)$$

Das wollen wir mit Induktion beweisen. Für $r = 0$ folgt die Aussage einfach aus der Definition von $N_m(z)$ und $\Lambda(z)$. Für $r = 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (N_m(z) \Lambda(z))|_{z=1} &= \frac{d}{dz} \left(\sum_{i=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} B_m(i) \sum_{j=-(m-1)^2/4}^{(m-1)^2/4} \lambda_j z^{i+j} \right) \Big|_{z=1} \\ &= \left(\sum_{i=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} B_m(i) \sum_{\substack{j=-(m-1)^2/4 \\ j \neq -i}}^{(m-1)^2/4} \lambda_j (i+j) z^{i+j-1} \right) \Big|_{z=1} \\ &= \sum_{i=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} B_m(i) \sum_{j=-(m-1)^2/4}^{(m-1)^2/4} (i+j) \lambda_j. \end{aligned}$$

Für den Induktionsschritt definieren wir uns

$$X_r(z) = \sum_{i=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} B_m(i) \sum_{j=-(m-1)^2/4}^{(m-1)^2/4} \lambda_j(i+j)^r z^{i+j-r}.$$

Wenn die polynomerzeugende Eigenschaft (2.6) gilt, gilt somit

$$X_r(1) = \begin{cases} 1 & r = 0 \\ 0 & r \in \{1, \dots, m\} \end{cases}.$$

Dann ist $(N_m(z)\Lambda(z))|_{z=1} = X_0(1) = 1$ und $\frac{d}{dz}(N_m(z)\Lambda(z))|_{z=1} = X_1(1) = 0$ und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} X_r &= \sum_{i=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} B_m(i) \sum_{\substack{j=-(m-1)^2/4 \\ j \neq -i+r}}^{(m-1)^2/4} \lambda_j(i+j)^r (i+j-r) z^{i+j-r-1} \\ &= \sum_{i=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} B_m(i) \left(\sum_{\substack{j=-(m-1)^2/4 \\ j \neq -i+r}}^{(m-1)^2/4} \lambda_j(i+j)^{r+1} z^{i+j-r-1} - \sum_{\substack{j=-(m-1)^2/4 \\ j \neq -i+r}}^{(m-1)^2/4} \lambda_j(i+j)^r r z^{i+j-r-1} \right) \\ &= \sum_{i=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} B_m(i) \left(\sum_{j=-(m-1)^2/4}^{(m-1)^2/4} \lambda_j(i+j)^{r+1} z^{i+j-r-1} - \lambda_{-i+r} r^{r+1} \frac{1}{z} \right) \\ &\quad - \sum_{i=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} B_m(i) \left(\sum_{j=-(m-1)^2/4}^{(m-1)^2/4} \lambda_j(i+j)^r r z^{i+j-r-1} - \lambda_{-i+r} r^{r+1} \frac{1}{z} \right) \\ &= \sum_{i=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} B_m(i) \sum_{j=-(m-1)^2/4}^{(m-1)^2/4} \lambda_j(i+j)^{r+1} z^{i+j-r-1} \\ &\quad - \frac{r}{z} \sum_{i=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} B_m(i) \sum_{j=-(m-1)^2/4}^{(m-1)^2/4} \lambda_j(i+j)^r z^{i+j-r} \\ &= X_{r+1} - \frac{r}{z} X_r. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} (N_m(z)\Lambda(z))|_{z=1} &= \frac{d}{dz} (X_1(z))|_{z=1} = \left(X_2 - \frac{1}{z} X_1 \right) \Big|_{z=1} \\ &= 0 - 1 \cdot 0 = 0, \\ \frac{d^3}{dz^3} (N_m(z)\Lambda(z))|_{z=1} &= \frac{d}{dz} \left(X_2 - \frac{1}{z} X_1 \right) \Big|_{z=1} = \left(X_3 - \frac{2}{z} X_2 - \left(-\frac{1}{z^2} X_1 + \frac{1}{z} (X_2 - \frac{1}{z} X_1) \right) \right) \Big|_{z=1} \\ &= \left(X_3 - \frac{3}{z} X_2 - \frac{2}{z^2} X_1 \right) \Big|_{z=1} = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Wir erhalten für jede Ableitung von $N_m(z)\Lambda(z)$ nach z bis zur m -ten Ableitung jeweils eine Summe von X_i ($1 \leq i \leq m$) und Vorfaktoren mit Potenzen von z im Nenner. Da wir nur an der Stelle $z = 1$ betrachten, sind die Vorfaktoren definiert und $X_i(1) = 0$, wenn die polynomerzeugende Eigenschaft gilt. Damit ist $\frac{d^r}{dz^r} (N_m(z)\Lambda(z))|_{z=1} = 0$ für $1 \leq r \leq m$.

Es gilt also die Gleichung (2.7) und wir zeigen statt der polynomgenerierende Eigenschaft (2.6) diese Gleichung:

$$\frac{d^r}{dz^r}(N_m(z)\Lambda(z))|_{z=1} = \begin{cases} 1 & r = 0 \\ 0 & r \in \{1, \dots, m\} \end{cases}. \quad (2.8)$$

Da $D(z)$ ein symmetrisches Laurent-Polynom mit Nullstelle 1 ist, folgt mit Lemma 2.4

$$D(z) = -(z-1) \left(\frac{1}{z} - 1 \right) q(z) = \frac{(z-1)^2}{z} q(z)$$

mit einem symmetrischen Laurent-Polynom q und

$$N_m(z)\Lambda(z) = \left(\sum_{l=0}^{(m-1)/2} (D(z))^l \right) (1 - D(z)) = 1 - D(z)^{(m+1)/2} = 1 - \frac{(z-1)^{m+1}}{z^{(m+1)/2}} (q(z))^{(m+1)/2}.$$

Damit folgt, dass Gleichung (2.8) gilt und somit ebenso die Annahme 2.2 für die kardinalen B-Splines. \square

Beispiel 2.7. Für $m = 3$ ergibt sich

$$\begin{aligned} N_m(z) &= \frac{1}{6} \frac{1}{z} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} z, \\ D(z) &= -\frac{1}{6} \frac{1}{z} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} z, \\ \Lambda(z) &= -\frac{1}{6} \frac{1}{z} + \frac{4}{3} - \frac{1}{6} z, \end{aligned}$$

also $\Lambda = (-\frac{1}{6}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{6})$. Für $m = 5$ ergibt sich

$$\begin{aligned} N_m(z) &= \frac{1}{120} \frac{1}{z^2} + \frac{13}{60} \frac{1}{z} + \frac{11}{20} + \frac{13}{60} z + \frac{1}{120} z^2, \\ D(z) &= -\frac{1}{120} \frac{1}{z^2} - \frac{13}{60} \frac{1}{z} + \frac{9}{20} - \frac{13}{60} z - \frac{1}{120} z^2, \\ \Lambda(z) &= \frac{1}{14400} \frac{1}{z^4} + \frac{13}{3600} \frac{1}{z^3} + \frac{7}{225} \frac{1}{z^2} - \frac{1469}{3600} \frac{1}{z} + \frac{503}{288} - \frac{1469}{3600} z + \frac{7}{225} z^2 + \frac{13}{3600} z^3 + \frac{1}{14400} z^4, \end{aligned}$$

also $\Lambda = (\frac{1}{14400}, \frac{13}{3600}, \frac{7}{225}, -\frac{1469}{3600}, \frac{503}{288}, -\frac{1469}{3600}, \frac{7}{225}, \frac{13}{3600}, \frac{1}{14400})$.

Wir wollen uns mit der Approximation von periodischen Funktionen beschäftigen. Dafür müssen wir ein paar Anpassungen machen, speziell müssen wir die Basisfunktion Φ periodisieren. Dafür schreiben wir für $n \in \mathbb{N}$

$$\Phi_n^{PER}(x) := \sum_{j \in \mathbb{N}} \Phi(n(x-j)), \quad x \in \mathbb{T},$$

für die Periodisierung von Φ .

Die folgende Definition führt eine Notation für den Sampling Operator ein, welcher die Funktion f an bestimmten Stellen auswertet.

Definition 2.8. Für $f \in C(\mathbb{T}, \mathbb{R}^d)$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir den **Sampling Operator** als

$$S_n(f) := \mathfrak{f} = \left(f\left(\frac{i}{n}\right) \right)_{i \in [n]} \in \ell([n], \mathbb{R}^d).$$

Dann führen wir noch die folgende Notation für die Kreisfaltung ein.

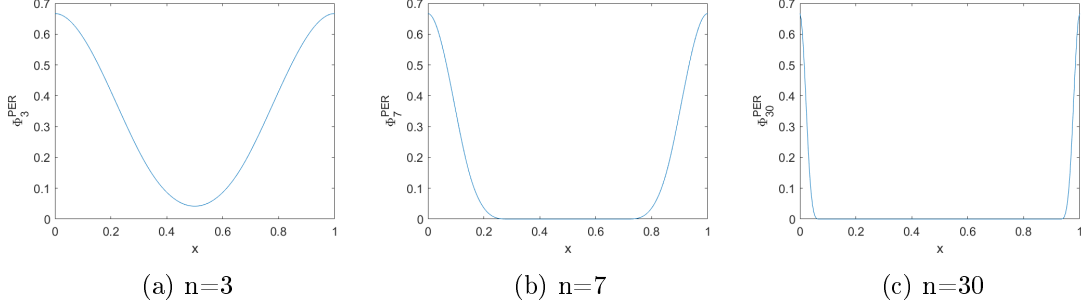


Abbildung 2.1: Die periodisierten Funktionen Φ_n^{PER} , wobei für $\Phi(x)$ der kardinale B-Spline $B_3(x)$ verwendet wurde.

Definition 2.9. Für Λ wie in Annahme 2.2 und $n, d \in \mathbb{N}$ definieren wir die **Kreisfaltung** als den linearen Operator

$$\text{circ}_\Lambda : \begin{cases} \ell([n], \mathbb{R}^d) & \rightarrow \ell([n], \mathbb{R}^d) \\ f & \mapsto \left(\sum_{k=-S}^S \lambda_k f_{i-k \bmod n} \right)_{i \in [n]} \end{cases}$$

Jetzt haben wir alle nötigen Werkzeuge um die Approximationsräume zu definieren, die uns interessieren.

Definition 2.10. Wir definieren die Approximationsräume durch

$$V_{\mathbb{R}^d}^n := \left\{ \sum_{i \in [n]} c_i \Phi_n^{PER}(x - i/n) : (c_i)_{i \in [n]} \subset \mathbb{R}^d \right\}.$$

Wir definieren den linearen Quasiinterpolationsoperator durch

$$Q_{\mathbb{R}^d}^n : \begin{cases} C(\mathbb{T}, \mathbb{R}^d) & \rightarrow V_{\mathbb{R}^d}^n \\ f & \mapsto \sum_{i \in [n]} (\text{circ}_\Lambda^n)_i \Phi_n^{PER}(x - i/n) \end{cases}$$

Das folgende klassische Resultat verbindet die asymptotische Approximationsrate von $Q_{\mathbb{R}^d}^n$ in n mit der Glattheit von f und dem Grad der polynomreproduzierende Eigenschaft von Φ .

Satz 2.11. Für $f \in W^{m,p}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^d)$ und $m > \frac{1}{p}$ gilt, dass

$$\|f - Q_{\mathbb{R}^d}^n f\|_{L_p} = \|f - Q_{\mathbb{R}^d}^n f\|_{W^{0,p}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^d)} \lesssim n^{-m} \|f\|_{W^{m,p}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^d)},$$

falls Φ die polynomreproduzierende Eigenschaft (2.1) für alle Polynome vom Grad kleiner m erfüllt.

Beweis. Wir können annehmen, dass $f \in C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{R}^d)$ gilt, denn für $f \in W^{m,p}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^d)$ folgt der Satz dann mit Dichtheitsargumenten.

Sei $nx \in [j, j+1)$. Da die Funktion Φ einen kompakten Träger hat, existiert $R \in \mathbb{Z}$, sodass

$$\begin{aligned} Q_{\mathbb{R}^d}^n f(x) &= \sum_{i \in [n]} \sum_{k=-S}^S \lambda_k f_{i-k \bmod n} \sum_{l \in \mathbb{N}} \Phi\left(n\left(x - \frac{i}{n}\right) - nl\right) \\ &= \sum_{i \in [n]} \sum_{l \in \mathbb{N}} \sum_{k=-S}^S \lambda_k f\left(\frac{i-k}{n}\right) \Phi(nx - i - nl) \\ &= \sum_{i=j-R}^{j+R} \sum_{k=-S}^S \lambda_k f\left(\frac{i-k}{n}\right) \Phi(nx - i). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Jetzt können wir eine Taylorentwicklung von $f(y)$ um x benutzen:

$$f(y) = \sum_{r=0}^{m-1} \frac{1}{r!} \frac{d^r}{dx^r} f(x) (y-x)^r + R_m(x, y), \quad (2.10)$$

wobei $R_m(x, y)$ der Taylor-Restterm ist. Wir können nun Gleichung (2.10) in die Formel (2.9) für den Quasiinterpolationsoperator einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned} Q_{\mathbb{R}^d}^n f(x) - f(x) &= \sum_{r=1}^{m-1} \frac{1}{r!} \frac{d^r}{dx^r} f(x) \sum_{i=j-R}^{j+R} \sum_{k=-S}^S \lambda_k \left(\frac{i-k}{n} - x \right)^r \Phi(nx-i) \\ &\quad + \sum_{i=j-R}^{j+R} \sum_{k=-S}^S \lambda_k R_m \left(x, \frac{i-k}{n} \right) \Phi(nx-i) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Wegen der polynomreproduzierenden Eigenschaft (2.1) von Φ folgt mit $u(i-k) = \left(\frac{i-k}{n} - x \right)^r$:

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k=-S}^S \lambda_k \left(\frac{i-k}{n} - x \right)^r \Phi(nx-i) = u(nx) = \left(\frac{nx}{n} - x \right)^r = 0.$$

Deswegen fällt der erste Term in der Formel (2.11) weg und wir erhalten

$$Q_{\mathbb{R}^d}^n f(x) - f(x) = \sum_{i=j-R}^{j+R} \sum_{k=-S}^S \lambda_k R_m \left(x, \frac{i-k}{n} \right) \Phi(nx-i) \quad (2.12)$$

Für $|k| \leq S$ und $|i-j| \leq R$ können wir den Restterm wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned} \left| R_m \left(x, \frac{i-k}{n} \right) \right| &\leq \left| \frac{1}{m!} \left(x - \frac{i-k}{n} \right)^m \frac{d^m}{dx^m} f(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{m!} n^{-m} (nx-i+k)^m \left| \frac{d^m}{dx^m} f(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{m!} (R+S)^m n^{-m} \left| \frac{d^m}{dx^m} f(x) \right| \\ &\lesssim n^{-m} \left| \frac{d^m}{dx^m} f(x) \right|, \end{aligned}$$

was zusammen mit Gleichung (2.12) das gewünschte Ergebnis liefert

$$\begin{aligned} \|Q_{\mathbb{R}^d}^n f(x) - f(x)\|_{L^p} &\leq \frac{1}{m!} (R+S)^m \left(\sum_{k=-S}^S |\lambda_k| \right) \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} |\Phi(nx-i)| \right) n^{-m} \left\| \frac{d^m}{dx^m} f \right\|_{L^p} \\ &\lesssim n^{-m} \|f\|_{W^{m,p}}. \end{aligned} \quad \square$$

Setzen wir für Φ die kardinalen B-Splines $B_m(x)$ ein, erfüllen diese nach Satz 2.6 die polynomregenerierende Eigenschaft (2.1) für $g = m+1$. Der Träger von B_m ist beschränkt auf $(\frac{m+1}{2}, \frac{m+1}{2})$, weswegen wir $R \leq m+1$ wählen können. Außerdem ergibt sich mit der Definition von Λ aus Gleichung (2.5), dass $S = \frac{(m-1)^2}{4}$. Weiterhin gilt mit Lemma 2.4 $\sum_{i \in \mathbb{Z}} |\Phi(nx-i)| = 1$, da die kardinalen B-Splines für alle $x \in \mathbb{R}$ nichtnegativ sind. Für $\Phi(x) = B_m(x)$ ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \|Q_{\mathbb{R}^d}^n f(x) - f(x)\|_{L^p} &\leq \frac{1}{(m+1)!} \left(m+1 + \frac{(m-1)^2}{4} \right)^{m+1} \left(\sum_{k=-S}^S |\lambda_k| \right) n^{-(m+1)} \left\| \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} f(x) \right\|_{L^p} \\ &= \frac{1}{(m+1)!} \left(\frac{m^2}{4} + \frac{m}{2} + \frac{5}{4} \right)^{m+1} \left(\sum_{k=-S}^S |\lambda_k| \right) n^{-(m+1)} \left\| \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} f(x) \right\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Beispiel 2.12. Für $\Phi(x) = B_3(x)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \|Q_{\mathbb{R}^d}^n f(x) - f(x)\|_{L^p} &\leq \frac{1}{4!} \left(\frac{4^2}{4} + 2 + \frac{5}{4} \right)^3 \frac{5}{3} n^{-4} \left\| \frac{d^4}{dx^4} f(x) \right\|_{L^p} \\ &\leq 26.5 n^{-4} \left\| \frac{d^4}{dx^4} f(x) \right\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Für $\Phi(x) = B_5(x)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \|Q_{\mathbb{R}^d}^n f(x) - f(x)\|_{L^p} &\leq \frac{1}{6!} \left(\frac{6^2}{4} + 3 + \frac{5}{4} \right)^6 \frac{2369}{900} n^{-6} \left\| \frac{d^6}{dx^6} f(x) \right\|_{L^p} \\ &\leq 19800 n^{-6} \left\| \frac{d^6}{dx^6} f(x) \right\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Nicht nur der Fehler der Funktionswerte konvergiert mit Rate m , sondern auch der Fehler in der Ableitung lässt sich mit Konvergenzrate $m - 1$ abschätzen:

Satz 2.13. Für $f \in W^{m,p}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^d)$ und $m > \frac{1}{p}$ gilt, dass

$$\left\| \frac{d}{dx} f - \frac{d}{dx} Q_{\mathbb{R}^d}^n f \right\|_{L^p} \lesssim n^{1-m} \|f\|_{W^{m,p}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^d)},$$

falls $g \geq m$, also Φ die polynomreproduzierende Eigenschaft (2.1) für alle Polynome vom Grad kleiner m erfüllt.

Beweis. Der Beweis funktioniert analog zum Beweis von Satz 2.11. Wir können annehmen, dass $f \in C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{R}^d)$ gilt, denn für $f \in W^{m,p}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^d)$ folgt der Satz dann mit Dichtheitsargumenten. Sei $nx \in [j, j+1)$. Da die Funktion Φ einen kompakten Träger hat, existiert $R \in \mathbb{Z}$, sodass

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} Q_{\mathbb{R}^d}^n f(x) &= \sum_{i=j-R}^{j+R} \sum_{k=-S}^S \lambda_k f\left(\frac{i-k}{n}\right) \frac{d}{dx} (\Phi(nx-i)) \\ &= \sum_{i=j-R}^{j+R} \sum_{k=-S}^S \lambda_k f\left(\frac{i-k}{n}\right) n \Phi'(nx-i) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Jetzt können wir wieder eine Taylorentwicklung von $f(y)$ um x benutzen:

$$f(y) = \sum_{r=0}^{m-1} \frac{1}{r!} \frac{d^r}{dx^r} f(x) (y-x)^r + R_m(x, y), \quad (2.14)$$

wobei $R_m(x, y)$ der Taylor-Restterm ist. Wir können nun Gleichung (2.14) in die Formel (2.13) für den Quasiinterpolationsoperator einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} Q_{\mathbb{R}^d}^n f(x) &= \sum_{r=0}^{m-1} \frac{1}{r!} \frac{d^r}{dx^r} f(x) \sum_{i=j-R}^{j+R} \sum_{k=-S}^S \lambda_k \left(\frac{i-k}{n} - x \right)^r n \Phi'(nx-i) \\ &\quad + \sum_{i=j-R}^{j+R} \sum_{k=-S}^S \lambda_k R_m\left(x, \frac{i-k}{n}\right) n \Phi'(nx-i) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Leiten wir die polynomreproduzierende Eigenschaft (2.1) von Φ nach x ab, erhalten wir

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k=-S}^S \lambda_k u(i-k) \Phi'(x-i) = u'(x). \quad (2.16)$$

Wählen wir für $u(i-k) = \left(\frac{i-k}{n} - x\right)^r$, was ein Polynom vom Grad höchstens $m-1$ ist, gilt $u'(\cdot) = \frac{r}{n} \left(\frac{\cdot}{n} - x\right)^{r-1}$, also

$$u'(nx) = \begin{cases} 0 & r > 1 \\ \frac{1}{n} & r = 1 \end{cases}.$$

Setzen wir das in Gleichung (2.15) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} Q_{\mathbb{R}^d}^n f(x) &= f(x) \sum_{i=j-R}^{j+R} \sum_{k=-S}^S \lambda_k n \Phi'(nx-i) + \sum_{r=1}^{m-1} \frac{1}{r!} \frac{d^r}{dx^r} f(x) n u'(nx) \\ &\quad + \sum_{i=j-R}^{j+R} \sum_{k=-S}^S \lambda_k R_m \left(x, \frac{i-k}{n}\right) n \Phi'(nx-i). \end{aligned}$$

Da $u'(nx) = 0$ für $r > 1$ ist, verschwinden im zweiten Term alle Summanden bis auf den ersten. Der erste Summand ist gerade $\frac{d}{dx} f(x)$. Wegen der Polynom erzeugenden Eigenschaft (2.16) von Φ für $u = 1$, gilt

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k=-S}^S \lambda_k \Phi'(x-i) = 0,$$

deswegen verschwindet der erste Term. Übrig bleibt Folgendes:

$$\frac{d}{dx} Q_{\mathbb{R}^d}^n f(x) - \frac{d}{dx} f(x) = \sum_{i=j-R}^{j+R} \sum_{k=-S}^S \lambda_k R_m \left(x, \frac{i-k}{n}\right) n \Phi'(nx-i). \quad (2.17)$$

Wie im Beweis von Satz 2.11 lässt sich der Restterm für $|k| \leq S$ und $|i-j| \leq R$ wie folgt abschätzen

$$\left| R_m \left(x, \frac{i-k}{n}\right) \right| \leq \frac{1}{m!} (R+S)^m n^{-m} \left| \frac{d^m}{dx^m} f(x) \right|$$

was zusammen mit Gleichung (2.17) das Ergebnis liefert

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dx} Q_{\mathbb{R}^d}^n f(x) - \frac{d}{dx} f(x) \right\|_{L^p} &\leq \frac{1}{m!} (R+S)^m \left(\sum_{k=-S}^S |\lambda_k| \right) \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} |\Phi'(nx-i)| \right) n^{1-m} \left\| \frac{d^m}{dx^m} f \right\|_{L^p} \\ &\lesssim n^{1-m} \|f\|_{W^{m,p}}. \end{aligned}$$

□

3 Mannigfaltigkeitswertige Approximation

In diesem Abschnitt wollen wir lineare Interpolationsoperatoren auf mannigfaltigkeitswertige Funktionen erweitern. Dazu sei die Mannigfaltigkeit durch $\mathcal{E} : M \rightarrow \mathbb{R}^d$ in einen linearen Raum eingebettet. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Definitionsbereich und mit $C(D, \mathbb{R}^d)$ bezeichnen wir den Raum der stetigen Funktionen, die von D in \mathbb{R}^d abbilden. Es sei

$$I_{\mathbb{R}^d} : C(D, \mathbb{R}^d) \rightarrow C(D, \mathbb{R}^d)$$

ein Interpolationsoperator für \mathbb{R}^d -wertige Funktionen. Dabei kann man an dieser Stelle einen beliebigen Interpolationsoperator benutzen. Der Quasiinterpolationsoperator $Q_{\mathbb{R}^d}$ aus Abschnitt 2.2 bildet ein Beispiel für einen Operator, der als Definitionsbereich den Torus \mathbb{T} benutzt, also periodische Funktionen approximiert. Das Ziel ist es, einen linearen Interpolationsoperator $I_{\mathbb{R}^d}$ zu nutzen, um einen Interpolationsoperator für M -wertige Funktionen $f : D \rightarrow M$ zu konstruieren, der $I_{\mathbb{R}^d}f$ punktweise auf M projiziert. Die Projektion auf M

$$P_M : U \rightarrow M, \quad P_M(y) = \operatorname{argmin}_{u \in U} \|y - u\| \tag{3.1}$$

ist nicht notwendig in ganz \mathbb{R}^d definiert. In Satz 3.12 sehen wir, dass es für jede Mannigfaltigkeit eine Umgebung U gibt, in der die Projektion wohldefiniert und mithilfe von Satz 3.13 differenzierbar ist. Wir bezeichnen mit

$$C(D, M) = \{f \in C(D, \mathbb{R}^d) : f(x) \in M \quad \forall x \in D\}$$

die stetigen M -wertigen Funktionen. Wir definieren mithilfe der Projektion P_M den Interpolationsoperator

$$I_M = P_M \circ I_{\mathbb{R}^d},$$

der für Funktionen aus $f \in C(D, M)$ mit $I_{\mathbb{R}^d}f(x) \in U$ definiert ist. Wir bezeichnen I_M als Interpolationsoperator für M -wertige Funktionen. Das bedeutet, dass wir eine lineare Interpolation in \mathbb{R}^d durchführen und anschließend auf die Mannigfaltigkeit M projizieren.

Für einfache Beispiele von Mannigfaltigkeiten wie S^1 und S^2 ist es anschaulich klar, wie die Umgebung U aussieht, in der die Projektion P_M wohldefiniert ist. Für andere Mannigfaltigkeiten M ist das nicht der Fall. Deswegen müssen wir uns zunächst mit den Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten beschäftigen. Wir benötigen die Definition eines Tangentialraumes $T_m M$, der eine Mannigfaltigkeit M in einem Punkt $m \in M$ approximiert, sowie die Definition eines Normalenraumes, der auf den Tangentialraum senkrecht steht, siehe dazu [6]. Wir wollen in Abschnitt 3.1 zuerst zeigen, dass es immer eine Umgebung U gibt, sodass die Projektion P_M wohldefiniert und glatt ist.

Wir wollen die Fehler, die bei solch einer Approximation entstehen, abschätzen. Dazu werden wir in Satz 3.15 zeigen, dass der Fehler sich mithilfe der Dreiecksungleichung durch den Fehler der linearen Approximation abschätzen lässt. Wenn die zu approximierende Funktion f zusätzlich differenzierbar ist und wir diese Ableitung approximieren wollen, dann sehen wir in Satz 3.17, dass sich dieser Fehler auch abschätzen lässt. Das hängt zum Einen von den Fehlern der linearen Interpolation ab, zum Anderen von der Umgebung U , wie wir später sehen werden. Wir werden diese Abschätzung erst allgemein beschreiben und dann in den Abschnitten 3.6, 3.7 und 3.8 an

konkreten Beispielen für die Mannigfaltigkeit M berechnen.

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^d$ sei wie üblich definiert durch

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i = x^\top y.$$

An einigen Stellen werden wir die Orthogonalprojektion auf einen linearen Unterraum im Hilbertraum \mathbb{R}^d benötigen. Dafür sei an dieser Stelle der folgende Satz erwähnt.

Satz 3.1. *Sei $S \subset \mathbb{R}^d$ ein Orthonormalsystem. Dann ist*

$$P_{\text{span}\{S\}} : x \mapsto \sum_{e \in S} \langle x, e \rangle e$$

die Orthogonalprojektion auf $\text{span}\{S\}$.

Beweis. Siehe [7, Satz V.4.8]. □

3.1 Der Projektionsoperator

Wir benötigen zunächst einige Definitionen, damit wir mit Mannigfaltigkeiten arbeiten können.

Definition 3.2. Sei M ein topologischer Raum. Wir sagen, M ist eine **d -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit** ($d \in \mathbb{N}$), wenn M die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- M ist ein Hausdorff-Raum.
- M erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.
- M ist lokal homöomorph zu einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^d

Ein Paar (U, φ) heißt **Karte**, wenn $U \subset M$ offen ist und $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ ein Homöomorphismus in die offene Teilmenge $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^d$ ist. Eine Familie von Karten $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ heißt **Atlas**, wenn die Urbilder der Karten ganz M überdecken.

M heißt **differenzierbare Mannigfaltigkeit**, wenn für alle Karten $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ und $\psi : V \rightarrow \psi(V)$ alle Kartenübergänge

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$$

differenzierbar sind.

Definition 3.3. Gegeben seien eine Mannigfaltigkeit M , ein Punkt x aus M , eine offene Umgebung U von p und eine Karte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$. Ist $\gamma : I \rightarrow M$ eine differenzierbare Kurve in M , wobei I ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist, das Null enthält, so ist $\varphi \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine differenzierbare Kurve im \mathbb{R}^d . Die Ableitung $(\varphi \circ \gamma)'(0)$ ist ein Vektor im \mathbb{R}^d . Kurven γ_i , für die $(\varphi \circ \gamma_i)'(0)$ übereinstimmt, bilden eine Äquivalenzklasse $[\gamma]$. Eine solche Äquivalenzklasse nennt man einen **geometrischen Tangentialvektor** von M in x . Der **Tangentialraum** $T_x M$ ist die Menge aller dieser Tangentialvektoren. Man kann zeigen, dass er nicht von der Wahl der Karte φ abhängt.

Bemerkung 3.4. Man kann zeigen, dass der Tangentialraum einer unendlich oft differenzierbaren Mannigfaltigkeit ein Vektorraum der gleichen Dimension wie die Mannigfaltigkeit ist, siehe dazu [6], Proposition 3.10.

Mit der geometrischen Definition des Tangentialraumes kann man sich Tangentialvektoren als „Pfeile“ vorstellen, die Tangenten an M sind und deren Anfangspunkte auf M liegen. Es gibt noch ein algebraisches Konzept des Tangentialraumes, das wir später brauchen werden.

Definition 3.5. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $m \in M$. Eine lineare Abbildung $X : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **algebraischer Tangentialvektor** zu M in m , wenn gilt

$$X(fg) = f(m)X(g) + g(m)X(f) \quad \text{für alle } f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R}).$$

Die Menge aller Tangentialvektoren in x ist ein Vektorraum, der **Tangentialraum** $T_m M$ zu M in m .

Bisher haben wir zwei Definitionen: geometrische und algebraische Tangentialvektoren. Diese sind aber äquivalent. Wir führen eine lineare Abbildung Ω ein, die einen geometrischen Tangentialvektor γ auf einen algebraischen X abbildet. Sei $\gamma : I \rightarrow M$ eine C^1 -Kurve, mit $\gamma(0) = m$. Wir assoziieren mit γ eine Abbildung $X = \Omega(\gamma)$, die auf reellwertigen glatten Funktionen f agiert:

$$\Omega(\gamma)(f) := X(f) = \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0} \quad (3.2)$$

Bemerkung 3.6. Sei M eine D -dimensionale Mannigfaltigkeit. Die geometrischen und algebraischen Tangentialvektorräume sind isometrische Vektorräume mit Dimension D . Die Abbildung Ω ist eine lineare Bijektion zwischen beiden.

Oftmals ist es nützlich, die Menge aller Tangentialvektoren zu allen Punkten einer Mannigfaltigkeit zu betrachten.

Definition 3.7. Gegeben ist eine glatte Mannigfaltigkeit. Wir definieren das **Tangentenbündel** von M , bezeichnet mit TM , als die disjunkte Vereinigung aller Tangentialräume an allen Punkten von M ,

$$TM = \bigcup_{m \in M} T_m M.$$

Wir schreiben ein Element dieser disjunkten Vereinigung als geordnetes Paar (m, v) , wobei $m \in M$ und $v \in T_m M$ ist.

Das Tangentenbündel erhält eine natürliche Projektionsabbildung $\pi : TM \rightarrow M$, welche jeden Vektor in $T_m M$ auf den Punkt m abbildet, dessen Tangente er ist: $\pi(m, v) = m$.

Für jedes $m \in \mathbb{R}^d$ kann der Tangentialraum $T_m \mathbb{R}^d$ kanonisch mit sich selbst identifiziert werden, und das Tangentenbündel $T\mathbb{R}^d$ ist kanonisch diffeomorph zu $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Durch diese Identifizierung erhält jeder Tangentialraum $T_m \mathbb{R}^d$ ein euklidisches Skalarprodukt.

Definition 3.8. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine eingebettete D -dimensionale Submannigfaltigkeit. Für jedes $m \in M$ definieren wir den **Normalenraum** zu M als den $(d - D)$ -dimensionalen Teilraum $N_m M \subseteq T_m \mathbb{R}^d$, der aus allen Vektoren orthogonal zu $T_m M$ besteht, bezüglich des euklidischen Skalarprodukts. Das **Normalenbündel** von M , bezeichnet mit NM , ist die Teilmenge von $T\mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, die aus allen Vektoren normal zu M besteht:

$$NM = \{(m, v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d : m \in M, v \in N_m M\}.$$

Dabei gibt es eine natürliche Projektion $\pi : NM \rightarrow M$, definiert durch

$$\pi : \begin{cases} NM & \rightarrow & M \subset \mathbb{R}^d \\ (m, v) & \mapsto & m \end{cases} \quad (3.3)$$

Das folgende Lemma zeigt, wie für Mannigfaltigkeiten die Normalenvektoren berechnen kann.

Lemma 3.9. Sei eine Mannigfaltigkeit M implizit gegeben durch

$$M = \{x \in \mathbb{R}^d : g(x) = 0 \in \mathbb{R}^{d-D}\}.$$

Dann enthalten die Spalten von $dg(m)$ gerade Normalenvektoren in m an M .

Beweis. Sei $\gamma(s)$ eine Kurve in M mit $\gamma(0) = m$. Dann gilt $g(\gamma(s)) = 0$. Leiten wir diese Gleichung nach s ab und betrachten die Stelle $s = 0$, erhalten wir

$$(dg(m))^\top \dot{\gamma}(0) = (dg(m))^\top t_i = 0,$$

für alle Tangentialvektoren t_i in $m \in M$. Daraus folgt die Behauptung. \square

Satz 3.10. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ eine eingebettete D -dimensionale Submannigfaltigkeit. Dann ist NM eine eingebettete d -dimensionale Submannigfaltigkeit von $T\mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.*

Beweis. Siehe Theorem 6.23 in [6]. \square

Mit NM als Submannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ definieren wir die Abbildung $E : NM \rightarrow \mathbb{R}^d$ durch

$$E(m, v) = m + v. \tag{3.4}$$

Diese Abbildung bildet jeden Normalenraum in den affinen Unterraum durch m und orthogonal zu $T_m M$ ab. Diese Abbildung ist glatt, weil sie die Restriktion der Additionsabbildung auf NM ist.

Definition 3.11. Eine **schlauchförmige Umgebung** U von M in \mathbb{R}^d ist das diffeomorphe Bild der Abbildung E einer offenen Teilmenge $V \subset NM$ der Form

$$V = \{(m, v) \in NM : |v| < \delta\}$$

für eine positive stetige Funktion $\delta : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Satz 3.12. *Jede eingebettete Submannigfaltigkeit des \mathbb{R}^d hat eine schlauchförmige Umgebung.*

Beweis. Siehe Satz 6.24 in [6]. \square

Mit diesem Satz ist gesichert, dass wir nach einer Interpolation mit $I_{\mathbb{R}^d}$ immer auf die Mannigfaltigkeit M projizieren können, vorausgesetzt $I_{\mathbb{R}^d} f(x)$ ist nah genug an $f(x)$, also nah genug an der Mannigfaltigkeit. Dazu muss $I_{\mathbb{R}^d} f(x)$ in der schlauchförmigen Umgebung U von M liegen, in der die Abbildung E differenzierbar und invertierbar ist. Mithilfe der Abbildung E können wir die Projektion $P_M : U \rightarrow M$ auf die Mannigfaltigkeit beschreiben.

Satz 3.13. *Es gilt für $u \in U$*

$$P_M(u) = \pi \circ E^{-1}(u). \tag{3.5}$$

Beweis. Es sei $u \in U$ und $P_M(u) = m \in M$. Wir zeigen, dass dann gilt $u - m \in N_m M$. Dazu nehmen wir das Gegenteil an und zerlegen $u - m$ in einen Anteil aus $N_m M$ und einen Anteil t aus $T_m M$. Dann gibt es eine Kurve $\gamma(s)$ in M mit $\gamma(0) = m$ und $\dot{\gamma}(0) = t$. Gehen wir entlang dieser Kurve, so erhalten wir für ein hinreichend kleines $\epsilon > 0$, dass $u - \gamma(\epsilon) < u - \gamma(0) = m$. Das ist ein Widerspruch zur Definition von P_M , denn diese Abbildung bildet auf das Element in M ab, welches den kleinsten Abstand hat.

Die Projektion P_M ist eindeutig. Wir müssen zeigen, dass $\pi \circ E^{-1}$ ebenso eindeutig ist. Dazu nehmen wir an, dass für $u \in U$ gleichzeitig gilt $\pi \circ E^{-1} = m \in M$ und $\pi \circ E^{-1} = m' \in M$. Das würde wiederum bedeuten, dass $u = m + v = m' + v'$ mit $v \in N_m M$ und $v' \in N_{m'} M$. Das steht im Widerspruch zur Eindeutigkeit von E^{-1} innerhalb einer schlauchförmigen Umgebung U , in der u liegt. \square

Dieser Satz zeigt, dass P_M in einer schlauchförmigen Umgebung U von M definiert und glatt ist.

3.2 Die Approximationsordnung

Dieser Abschnitt bildet die Grundlage für die weitere Arbeit. Wir zeigen, dass der Fehler der Interpolation auf M in der Größenordnung des Fehlers der linearen Interpolation ist und dass sich der Fehler der Ableitung der Interpolation auf M mithilfe der Fehler bei der linearen Interpolation abschätzen lässt. Für diese Fehlerabschätzung definieren wir uns zunächst eine Norm für Funktionen aus $C(D, \mathbb{R}^d)$.

Definition 3.14. Für eine Funktion $f \in C(D, \mathbb{R}^d)$ sei eine Norm definiert durch

$$\|f\|_{L^\infty(D),p} := \sup_{x \in D} \|f(x)\|_p.$$

Der folgende Satz zeigt mithilfe der Dreiecksungleichung, dass der Fehler von I_M von einer stetigen Funktion $f \in C(D, M)$ nicht größer ist, als der Fehler von $I_{\mathbb{R}^d}$, bis auf den Faktor 2.

Satz 3.15. Sei $f \in C(D, M)$ eine stetige M -wertige Funktion und die Werte $I_{\mathbb{R}^d}f(x)$ liegen in einer schlauchförmigen Umgebung U von M aus Definition 3.11. Dann gilt die folgende Abschätzung

$$\|I_M f - f\|_{L^\infty(D),p} \leq \left(1 + d^{|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}|}\right) \|I_{\mathbb{R}^d} f - f\|_{L^\infty(D),p}.$$

Ebenso kann der Fehler von $I_M f$ in der L_p -Norm durch den Fehler von $I_{\mathbb{R}^d}$ abgeschätzt werden,

$$\|I_M f - f\|_{L^p} \leq \left(1 + d^{|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}|}\right) \|f - I_{\mathbb{R}^d} f\|_{L^p}.$$

Beweis. Aus der Dreiecksungleichung und der Definition von I_M folgt

$$\|I_M f - f\|_{L^\infty(D),p} \leq \|I_M f - I_{\mathbb{R}^d} f\|_{L^\infty(D),p} + \|I_{\mathbb{R}^d} f - f\|_{L^\infty(D),p}.$$

Da f Funktionswerte auf M hat, folgt aus der Definition von P_M und Lemma A.3 für $p \geq 2$

$$\|I_M f(x) - I_{\mathbb{R}^d} f(x)\|_p \leq \|I_M f(x) - I_{\mathbb{R}^d} f(x)\|_2 \leq \|f(x) - I_{\mathbb{R}^d} f(x)\|_2 \leq d^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \|f(x) - I_{\mathbb{R}^d} f(x)\|_p.$$

Für $p < 2$ kann man analog vorgehen. Daraus folgt die Behauptung. Die Abschätzung für die L_p -Norm folgt direkt aus dieser punktweisen Abschätzung. \square

Wir wollen den Fehler von der Ableitung von $I_M f$ von der Ableitung von f betrachten. Dieser hat im Wesentlichen die gleiche Ordnung, wie der punktweise Fehler der Ableitung von $I_{\mathbb{R}^d}$, vorausgesetzt f ist differenzierbar und $I_{\mathbb{R}^d} f$ liegt wieder in der Umgebung U .

Um die Ableitung von f approximieren zu können, muss f differenzierbar sein und wir bezeichnen mit $f'(x) \in \mathbb{R}^d$ die Ableitung von f in $x \in D$, wobei f über die Einbettung $M \subset \mathbb{R}^d$ als \mathbb{R}^d -wertige Funktionen angesehen wird. Diese wollen wir durch die Ableitung von $I_M f$ approximieren. Dazu erhalten wir mithilfe der Kettenregel

$$(I_M f)' = dP_M(I_{\mathbb{R}^d} f) (I_{\mathbb{R}^d} f)'$$

Dabei ist $P_M : \mathbb{R}^d \rightarrow M \subset \mathbb{R}^d$ durch die Einbettung von M in \mathbb{R}^d eine \mathbb{R}^d -wertige Funktion. Damit ist die Jacobi-Matrix $dP_M(u)$ dieser Funktion eine $d \times d$ -Matrix. Es muss wieder $I_{\mathbb{R}^d} f$ in der Umgebung U von M liegen, damit dies definiert ist, also muss $u \in U$ sein. Der hintere Ausdruck $(I_{\mathbb{R}^d} f)'$ ist nur definiert, wenn die lineare Interpolante differenzierbar ist. Das ist insbesondere für den Quasiinterpolationsoperator $Q_{\mathbb{R}^d}$ aus Abschnitt 2.2 für $m > 1$ erfüllt.

Zur Abschätzung des Fehlers $\|(I_M f)' - f'\|_{L^\infty(D),p}$ müssen wir uns folgenden Ausdruck definieren.

Definition 3.16. Sei U eine schlauchförmige Umgebung von M aus Definition 3.11. Dann definieren wir für $z \in M$ und $u \in U$ den Ausdruck

$$\Psi(z, u) = \frac{\|dP_M(u) - dP_M(z)\|_p}{\|u - z\|_p}. \quad (3.6)$$

Dabei steht im Zähler von Ψ die p -Norm für $d \times d$ -Matrizen. Dafür wählen wir eine mit der p -Vektornorm verträgliche Matrixnorm, siehe dazu Anhang A. Ebenso wie in Definition 3.14 können wir für Matrizen die Norm $\|\cdot\|_{L^\infty(M),p}$ definieren durch

$$\|dP_M\|_{L^\infty(M),p} = \sup_{m \in M} \|dP_M(m)\|_p. \quad (3.7)$$

Dabei ist zu beachten, dass wir hier das Supremum nur über alle $m \in M$ bilden. Der folgende Satz zeigt, wie sich der Fehler bei der Approximation der Ableitung von f durch die Fehler bei der linearen Interpolation abschätzen lässt.

Satz 3.17. *Es sei $f \in C^1(D, M) \subset C^1(D, \mathbb{R}^d)$ eine differenzierbare Funktion. Außerdem sei die Interpolierende $I_{\mathbb{R}^d} f$ differenzierbar, und die Werte $I_{\mathbb{R}^d} f(x)$ liegen in einer schlauchförmigen Umgebung U von M aus Definition 3.11. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \|(I_M f)' - f'\|_{L^\infty(D),p} &\leq \|dP_M\|_{L^\infty(M),p} \|(I_{\mathbb{R}^d} f)' - f'\|_{L^\infty(D),p} \\ &+ \left(\sup_{\substack{u \in U, z \in M \\ u \neq z}} \Psi(z, u) \right) \|I_{\mathbb{R}^d} f - f\|_{L^\infty(D),p} \left(\|(I_{\mathbb{R}^d} f)' - f'\|_{L^\infty(D),p} + \|f'\|_{L^\infty(D),p} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Beweis. Wegen der Kettenregel gilt

$$(I_M f)' = dP_M(I_{\mathbb{R}^d} f) (I_{\mathbb{R}^d} f)'$$

Andererseits gilt, da $P_M f = f$,

$$f' = (P_M f)' = dP_M(f) f'.$$

Demnach gilt

$$\begin{aligned} (I_M f)' - f' &= dP_M(I_{\mathbb{R}^d} f) (I_{\mathbb{R}^d} f)' - dP_M(f) f' \\ &= (dP_M(I_{\mathbb{R}^d} f) - dP_M(f)) (I_{\mathbb{R}^d} f)' + dP_M(f) ((I_{\mathbb{R}^d} f)' - f'). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} \|(I_M f)' - f'\|_{L^\infty(D),p} &\leq \left(\sup_{\substack{u \in U, z \in M \\ u \neq z}} \Psi(z, u) \right) \|I_{\mathbb{R}^d} f - f\|_{L^\infty(D),p} \|(I_{\mathbb{R}^d} f)'\|_{L^\infty(D),p} \\ &+ \|dP_M\|_{L^\infty(M),p} \|(I_{\mathbb{R}^d} f)' - f'\|_{L^\infty(D),p}. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dann mit

$$\|(I_{\mathbb{R}^d} f)'\|_{L^\infty(D),p} \leq \|(I_{\mathbb{R}^d} f)' - f'\|_{L^\infty(D),p} + \|f'\|_{L^\infty(D),p}. \quad \square$$

Dieser Satz bildet die Grundlage für die weitere Arbeit. Wir wollen die darin vorkommenden Ausdrücke weiter untersuchen. Wie wir in Abschnitt 3.4 sehen werden, lässt sich der Ausdruck $\|dP_M\|_{L^\infty(M),p}$ für eine allgemeine Mannigfaltigkeit M abschätzen. Der Wert $\Psi(z, u)$ ist für $u \rightarrow z$ ein Ausdruck der Form „ $\frac{0}{0}$ “. Wie wir später sehen werden, lässt sich dieser Ausdruck beschränken.

Die Konstante $\sup \Psi(z, u)$ hängt von der gewählten Umgebung U ab. Wie wir später in Abschnitt 3.5 sehen werden, geht diese Konstante gegen ∞ , falls wir die Umgebung U zu groß wählen. Je kleiner wir eine Umgebung U wählen, desto besser können wir die Konstante abschätzen. Dafür muss allerdings die lineare Interpolierende mehr erfüllen: $I_{\mathbb{R}^d} f(x)$ muss für alle $x \in D$ in einer kleineren Umgebung U von M liegen. Um die Konstante abzuschätzen, müssen wir einen Mittelweg finden, indem wir eine schlauchförmige Umgebung U aus Definition 3.11 wählen, die einerseits nicht zu groß, aber auch nicht zu klein ist.

Deswegen wollen wir uns im Folgenden damit beschäftigen, wie sich diese Konstanten abschätzen lassen. Dazu betrachten wir zunächst das Beispiel $M = S^{d-1}$, was wir mit einer numerischen Anwendung abschließen werden.

3.3 Funktionen mit Werten auf der Sphäre

In diesem Abschnitt betrachten wir das erste Beispiel einer Mannigfaltigkeit genauer. Die in \mathbb{R}^d eingebettete $(d-1)$ -dimensionale Einheitskugel bezeichnen wir mit S^{d-1} . Dabei entsteht für $d=2$ der Einheitskreis im Zweidimensionalen und für $d=3$ entsteht die Einheitskugel im dreidimensionalen reellen Raum. Diese Mannigfaltigkeiten lassen sich beschreiben durch

$$S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 = 1\}.$$

Die Projektion $P_{S^{d-1}}$ lässt sich in diesem Fall einfach beschreiben durch

$$P_{S^{d-1}} : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow S^{d-1}, \quad P_{S^{d-1}}(x) = \frac{x}{\|x\|_2}.$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert und glatt.

Folgendes Lemma hilft die Konstante $\|dP_{S^{d-1}}\|_{L^\infty(M),2}$ aus Satz 3.17 abzuschätzen.

Lemma 3.18. *Es gilt für die Ableitung*

$$dP_{S^{d-1}} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\|x\|_2} \left(I_{d \times d} - \frac{x}{\|x\|_2} \left(\frac{x}{\|x\|_2} \right)^\top \right) \quad (3.9)$$

und außerdem gilt

$$\|dP_{S^{d-1}}\|_{\infty,p} \leq \begin{cases} \sqrt{d-1} & \text{falls } p \geq 2 \\ d^{\frac{2}{p}-1} \sqrt{d-1} & \text{falls } p < 2 \end{cases}.$$

Beweis. Die Gleichung für die Ableitung folgt aus

$$\begin{aligned} dP_{S^{d-1}} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \right) &= \frac{1}{\|x\|_2^3} \begin{pmatrix} \sum_{i=2}^d x_i^2 & -x_1 x_2 & \cdots & -x_1 x_d \\ -x_1 x_2 & x_1^2 + \sum_{i=3}^d x_i^2 & \cdots & -x_2 x_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_d x_1 & -x_d x_2 & \cdots & \sum_{i=1}^{d-1} x_i^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|x\|_2} \left(I_{d \times d} - \frac{x}{\|x\|_2} \left(\frac{x}{\|x\|_2} \right)^\top \right). \end{aligned}$$

Dabei ist $I_{d \times d}$ die d -dimensionale Einheitsmatrix.

Für den weiteren Beweis benutzen wir die Formel

$$\|x\|_2^4 = \sum_{i=1}^d x_i^4 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^d x_i^2 x_j^2, \quad (3.10)$$

die später noch hilfreich ist, um Terme zu vereinfachen. Für die Konstante gilt

$$\begin{aligned}
 \|dP_{S^{d-1}}\|_{\infty,2} &= \sup_{m \in S^{d-1}} \|dP_{S^{d-1}}(m)\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \left\| \frac{1}{\|x\|_2^3} \begin{pmatrix} \|x\|_2^2 - x_1^2 & -x_1x_2 & \cdots & -x_1x_d \\ -x_1x_2 & \|x\|_2^2 - x_2^2 & \cdots & -x_2x_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_dx_1 & -x_dx_2 & \cdots & \|x\|_2^2 - x_d^2 \end{pmatrix} \right\|_2 \\
 &= \sup_{\|x\|_2=1} \left(\sum_{i=1}^d (\|x\|_2^2 - x_i^2)^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^d (x_i x_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \sup_{\|x\|_2=1} \left(d \|x\|_2^4 + \sum_{i=1}^d (-2 \|x\|_2^2 x_i^2 + x_i^4) + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^d x_i^2 x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \sup_{\|x\|_2=1} (d - 2 \|x\|_2^4 + \|x\|_2^4)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \sqrt{d-1},
 \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

Für $p \neq 2$ können wir Lemma A.3 zur Abschätzung benutzen:

$$\begin{aligned}
 \|dP_{S^{d-1}}\|_{L^\infty(M),p} &= \sup_{\|x\|_2=1} \|dP_{S^{d-1}}(x)\|_p \leq \sup_{\|x\|_2=1} \begin{cases} \|dP_M(x)\|_2 & \text{falls } p > 2 \\ (d^2)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \|dP_M(x)\|_2 & \text{falls } p < 2 \end{cases} \\
 &\leq \begin{cases} \sqrt{d-1} & \text{falls } p > 2 \\ d^{\frac{2}{p}-1} \sqrt{d-1} & \text{falls } p < 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

□

Für die Abschätzung von Ψ betrachten wir wieder zunächst den Fall $p = 2$ und nutzen danach Lemma A.3.

Lemma 3.19. *Sei $M = S^{d-1}$ und $p = 2$. Dann lässt sich der Ausdruck*

$$\Psi(m, u) = \frac{\|dP_M(u) - dP_M(m)\|_2}{\|u - m\|_2}$$

aus Definition 3.16 beschreiben durch

$$\Psi^2(m, u) = \frac{\frac{d-1}{\|u\|_2^2} + d - 1 + \frac{4-2d}{\|u\|_2} - \frac{2\langle u, m \rangle^2}{\|u\|_2^3}}{\|u\|_2^2 + 1 - 2\langle u, m \rangle}.$$

Beweis. Sei $m \in M$, also $\|m\|_2 = 1$. Aufgrund der Definition des Skalarproduktes können wir diese Gleichung benutzen:

$$\langle u, m \rangle^2 = \sum_{i=1}^d u_i^2 m_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^d u_i m_i u_j m_j. \quad (3.11)$$

Der Nenner von $\Psi(m, u)$ lässt sich umformen zu

$$\sqrt{\|u\|_2^2 + 1 - 2\langle u, m \rangle} = \sqrt{\|u\|_2^2 + 1 - 2\|u\| \cos(u, m)}.$$

Für den Zähler von $\Psi(m, u)$ gilt Folgendes

$$\begin{aligned}
 & \|dP_M(u) - dP_M(m)\|_2^2 \\
 &= \left\| \begin{pmatrix} \frac{\|u\|_2^2 - u_1^2}{\|u\|_2^3} - (\|m\|_2^2 - m_1^2) & \frac{-u_1 u_2}{\|u\|_2^3} + m_1 m_2 & \cdots & \frac{-u_1 u_d}{\|u\|_2^3} + m_1 m_d \\ \frac{-u_1 u_2}{\|u\|_2^3} + m_1 m_2 & \frac{\|u\|_2^2 - u_2^2}{\|u\|_2^3} - (\|m\|_2^2 - m_2^2) & \cdots & \frac{-u_2 u_d}{\|u\|_2^3} + m_2 m_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-u_d u_1}{\|u\|_2^3} + m_d m_1 & \frac{-u_d u_2}{\|u\|_2^3} + m_d m_2 & \cdots & \frac{\|u\|_2^2 - u_d^2}{\|u\|_2^3} - (\|m\|_2^2 - m_d^2) \end{pmatrix} \right\|_2^2 \\
 &= \sum_{i=1}^d \left(\frac{\|u\|_2^2 - u_i^2}{\|u\|_2^3} - (\|m\|_2^2 - m_i^2) \right)^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^d \left(-\frac{u_i u_j}{\|u\|_2^3} + m_i m_j \right)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^d \left[\frac{(\|u\|_2^2 - u_i^2)^2}{\|u\|_2^6} + (\|m\|_2^2 - m_i^2)^2 - \frac{2}{\|u\|_2^3} (\|m\|_2^2 - m_i^2) (\|u\|_2^2 - u_i^2) \right] \\
 &\quad + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^d \left(\frac{u_i^2 u_j^2}{\|u\|_2^6} + m_i^2 m_j^2 - 2 \frac{u_i u_j m_i m_j}{\|u\|_2^3} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^d \left[\frac{\|u\|_2^4}{\|u\|_2^6} - \frac{2 \|u\|_2^2 u_i^2}{\|u\|_2^6} + \frac{u_i^4}{\|u\|_2^6} + \|m\|_2^4 - 2 \|m\|_2^2 m_i^2 + m_i^4 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{\|u\|_2^3} (\|u\|_2^2 \|m\|_2^2 + u_i^2 m_i^2 - u_i^2 \|m\|_2^2 - m_i^2 \|u\|_2^2) \right] \\
 &\quad + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^d \left(\frac{u_i^2 u_j^2}{\|u\|_2^6} + m_i^2 m_j^2 - 2 \frac{u_i u_j m_i m_j}{\|u\|_2^3} \right) \\
 &\stackrel{(3.10)}{=} \frac{d}{\|u\|_2^2} - 2 \frac{\|u\|_2^4}{\|u\|_2^6} + \frac{\|u\|_2^4}{\|u\|_2^6} + d - 2 \|m\|_2^3 + \|m\|_2^4 - \frac{2d}{\|u\|_2} + \frac{2 \|m\|_2^2 \|u\|_2^2}{\|u\|_2^3} + \frac{2 \|m\|_2^2 \|u\|_2^2}{\|u\|_2^3} \\
 &\quad - \frac{2}{\|u\|_2^3} \sum_{i=1}^d u_i^2 m_i^2 - \frac{4}{\|u\|_2^3} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^d u_i u_j m_i m_j \\
 &\stackrel{(3.11)}{=} \frac{d-1}{\|u\|_2^2} + d - 1 + \frac{4-2d}{\|u\|_2} - \frac{2}{\|u\|_2^3} \langle u, m \rangle^2
 \end{aligned}$$

Damit lässt sich Ψ beschreiben durch

$$\Psi^2(m, u) = \frac{\frac{d-1}{\|u\|_2^2} + d - 1 + \frac{4-2d}{\|u\|_2} - \frac{2\langle u, m \rangle^2}{\|u\|_2^3}}{\|u\|_2^2 + 1 - 2\langle u, m \rangle}. \quad \square$$

Für $\|u\|_2 \rightarrow 0$ geht der Term $\Psi(m, u)$ gegen unendlich. Der Grenzwert $u \rightarrow m$ von $\Psi(m, u)$ hängt von der Richtung ab, in die wir den Grenzwert betrachten. Ist $u \in M$, gilt $\|u\|_2 = 1$ und somit gilt

$$\Psi^2(m, u) = \frac{d-1 + d-1 + 4-2d - 2\langle u, m \rangle^2}{2-2\langle u, m \rangle} = \frac{2-2\langle u, m \rangle^2}{2-2\langle u, m \rangle} = \langle u, m \rangle + 1 \leq 2,$$

da $\langle u, m \rangle = \|m\|_2 \|u\|_2 \cos(u, m) \leq 1$. Wenn man den Grenzwert $u \rightarrow m$ entlang von M betrachtet, ist dieser unabhängig von der Dimension gleich 2. Andererseits gilt, falls $u = m \|u\|_2$ und

$\langle u, m \rangle = \|u\|_2$, dass

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow m} \Psi^2(m, u) &= \lim_{u \rightarrow m} \frac{\frac{d-1}{\|u\|_2^2} + d - 1 + \frac{4-2d}{\|u\|_2} - \frac{2}{\|u\|_2^3} \langle u, m \rangle^2}{\|u\|_2^2 + 1 - 2\langle u, m \rangle} \\ &= \lim_{\|u\|_2 \rightarrow 1} \frac{(d-1) \left(\frac{1}{\|u\|_2^2} + 1 - \frac{2}{\|u\|_2} \right)}{(\|u\|_2 - 1)^2} \\ &= \lim_{\|u\|_2 \rightarrow 1} \frac{\frac{d-1}{\|u\|_2^2} (\|u\|_2 - 1)^2}{(\|u\|_2 - 1)^2} \\ &= d - 1. \end{aligned}$$

Somit muss einerseits $\sup \Psi(m, u) \geq \sqrt{2}$ sein und andererseits $\sup \Psi(m, u) \geq \sqrt{d-1}$. Die anderen Grenzwerte liegen dazwischen, wie wir anhand der Abschätzung des Supremums sehen werden. Diese beiden verschiedenen Grenzwerte begründen, warum zwischen $d = 2$ und $d > 2$ unterschieden werden muss. Im ersten Fall ist der Grenzwert für $u \rightarrow m$ entlang M größer, im zweiten Fall ist der Grenzwert für $\cos(u, m) = 1$, das heißt falls $u - m$ senkrecht auf dem Tangentialraum von S^{d-1} steht, größer.

In Abbildung 3.1 ist zu $M = S^1$ und $m = (0, 1)^\top$ für $u \in \mathbb{R}^2$ der Wert $\Psi(m, u)$ dargestellt. Man

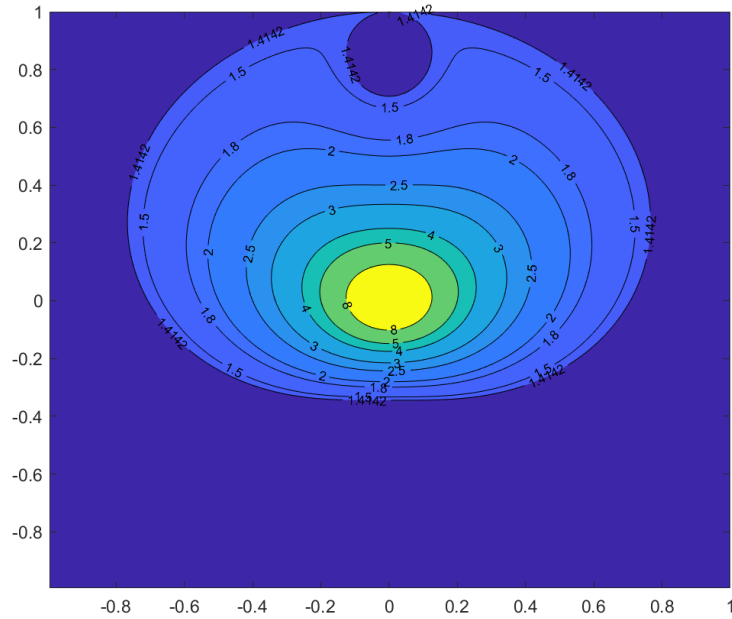


Abbildung 3.1: $\Psi(m, u)$ zu $m = (0, 1)^\top$ für $M = S^1$

sieht, dass hier der Wert $\lim_{u \rightarrow m} \Psi(m, u)$ am größten ist, wenn u auf S^1 liegt. Das folgende Lemma zeigt, dass die Grenzwerte, die wir berechnet haben, eine obere Schranke für den Grenzwert $\lim_{u \rightarrow m} \Psi(m, u)$ bilden und wie das Supremum von $\Psi(m, u)$ abgeschätzt werden kann.

Lemma 3.20. *Sei $M = S^{d-1}$, $p = 2$ und $1 > \delta > 0$. Dann lässt sich das Supremum von $\Psi(m, u)$ in der Umgebung $U = \{u \in \mathbb{R}^d : \|u\|_2 \geq \delta\}$ von S^{d-1} abschätzen durch*

$$\sup_{\substack{\|u\|_2 \geq \delta, m \in S^{d-1} \\ u \neq m}} \Psi^2(m, u) \leq \frac{1}{\delta^2} \cdot \begin{cases} d - 1 & \text{falls } d > 2 \\ 2 & \text{falls } d = 2 \end{cases}.$$

Beweis. Für $\|u\|_2 > 1$ ist der Zähler von $\Psi(m, u)$ kleiner und der Nenner größer als für $\|u\|_2 = 1$

und dasselbe m . Deswegen ist in diesem Fall $\Psi^2(m, u) < 2$. Wir können somit unsere Betrachtungen auf $\|u\|_2 < 1$ reduzieren. Wir schätzen dazu das Maximum

$$\max_{\|u\|_2=\delta} \Psi^2(m, u)$$

ab. Zur Vereinfachung der Schreibweise schreiben wir $a = \cos(u, m) = \frac{\langle u, m \rangle}{\|u\|_2}$. Zuerst betrachten wir den Fall, dass $d = 2$. Für $0 < \delta < 1$ gilt, da $\min 2a^2 - 4a = -2$:

$$\begin{aligned} & 0 \leq \left(1 - \frac{1}{\delta}\right)^2 = 1 + \frac{1}{\delta^2} - \frac{2}{\delta}, \\ \Rightarrow & 0 \leq 1 + \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{\delta}(2a^2 - 4a), \\ \Rightarrow & \frac{1}{\delta^2} + 1 - \frac{2a^2}{\delta} \leq 2 + \frac{2}{\delta^2} - \frac{4a}{\delta}, \\ \Rightarrow & \frac{1}{\delta^2} + 1 - \frac{2a^2}{\delta} \leq \frac{2}{\delta^2}(\delta^2 + 1 - 2a\delta), \\ \Rightarrow & \sup_{\|u\|_2=\delta} \Psi^2(u, m) = \frac{\frac{1}{\delta^2} + 1 - \frac{2a^2}{\delta}}{\delta^2 + 1 - 2a\delta} \leq \frac{2}{\delta^2}. \end{aligned}$$

Gilt hingegen $d \geq 3$, können wir wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} & 0 \leq 2(a-1)(a-d+2) \\ \Rightarrow & 0 \leq 2a^2 - 2ad + 2a + 2d - 4, \\ \Rightarrow & 4 - 2d - 2a^2 \leq -2a(d-1), \\ \Rightarrow & \frac{4-2d}{\delta} - \frac{2a^2}{\delta} \leq -\frac{2a(d-1)}{\delta}, \\ \Rightarrow & \frac{d-1}{\delta^2} + d-1 + \frac{4-2d}{\delta} - \frac{2a^2}{\delta} \leq \frac{d-1}{\delta^2} + d-1 - \frac{2a(d-1)}{\delta}, \\ \Rightarrow & \frac{d-1}{\delta^2} + d-1 + \frac{4-2d}{\delta} - \frac{2a^2}{\delta} \leq \frac{d-1}{\delta^2}(\delta^2 + 1 - 2a\delta), \\ \Rightarrow & \sup_{\|u\|_2=\delta} \Psi^2(m, u) = \frac{\frac{d-1}{\delta^2} + d-1 + \frac{4-2d}{\delta} - \frac{2a^2}{\delta}}{\delta^2 + 1 - 2a\delta} \leq \frac{d-1}{\delta^2}. \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung 3.21. Für $p \neq 2$ und $1 > \delta > 0$ können wir das Supremum von Ψ mithilfe von Lemma A.3 abschätzen. Für $p > 2$ gilt

$$\frac{\|dP_{S^{d-1}}(u) - dP_{S^{d-1}}(m)\|_p}{\|u - m\|_p} \leq \frac{\|dP_{S^{d-1}}(u) - dP_{S^{d-1}}(m)\|_2}{d^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \|u - m\|_2},$$

also

$$\sup_{\substack{\|u\| \geq \delta, m \in S^{d-1} \\ u \neq m}} \Psi^2(m, u) \leq d^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \cdot \frac{1}{\delta^2} \cdot \begin{cases} d-1 & \text{falls } d > 2 \\ 2 & \text{falls } d = 2 \end{cases}.$$

Für $p < 2$ gilt

$$\frac{\|dP_{S^{d-1}}(u) - dP_{S^{d-1}}(m)\|_p}{\|u - m\|_p} \leq \frac{(d^2)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \|dP_{S^{d-1}}(u) - \frac{d}{dx}P_{S^{d-1}}(m)\|_2}{\|u - m\|_2},$$

also

$$\sup_{\substack{\|u\| \geq \delta, m \in S^{d-1} \\ u \neq m}} \Psi^2(m, u) \leq d^{\frac{2}{p}-1} \cdot \frac{1}{\delta^2} \cdot \begin{cases} d-1 & \text{falls } d > 2 \\ 2 & \text{falls } d = 2 \end{cases}.$$

Wir wollen die lineare Quasiinterpolation aus Kapitel 2.2 auf S^{d-1} verallgemeinern.

Lemma 3.22. *Für $f \in C^{m+1}(\mathbb{T}, M)$ gilt*

$$\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{T}),2} \leq \|f^{(m+1)}\|_{L^\infty(\mathbb{T}),2}$$

Beweis. Da f eine stetige, $(m+1)$ -mal differenzierbare, periodische Funktion ist, sind alle Ableitungen von f periodische Funktionen. Deswegen wird das Maximum von $\|f'(x)\|_2$ angenommen. Nach dem Satz von Rolle gibt es einen Punkt $x_0 \in \mathbb{T}$, sodass $f'(x_0) = 0$ ist. Wegen dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es einen Punkt $\xi \in \mathbb{T}$, sodass

$$f'(x) = f'(x_0) + f^{(2)}(\xi)(x - x_0) \leq f^{(2)}(\xi),$$

dabei ist das Relationszeichen komponentenweise zu verstehen. Mit genau derselben Argumentation kann man die Anzahl der Ableitungen schrittweise erhöhen und erhält schließlich

$$\|f'(x)\|_2 \leq \|f^{(m+1)}(x)\|_2,$$

woraus die Behauptung folgt. \square

Mithilfe dieses Lemmas können wir die Konstante $\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{T}),2}$ durch die $m+1$ -te Ableitung von f ausdrücken. Für den Fehler bei der Quasiinterpolation in S^{d-1} gilt

Satz 3.23. *Der Quasiinterpolationsoperator $Q_{\mathbb{R}^d}^n$ sei definiert in Definition 2.10 mit den kardinalen B-Spline B_m als Basisfunktion Φ und den Koeffizienten λ_k aus Satz 2.6. Es sei $1 > \delta > 0$, sodass $\|Q_{\mathbb{R}^d}^n f\|_{L^\infty(\mathbb{T}),2} \geq \delta$, also $\|f - Q_{\mathbb{R}^d}^n f\|_{L^\infty(\mathbb{T}),2} \leq 1 - \delta$. Die Umgebung U , in der P_M definiert und glatt ist, wählen wir als $U = \{u \in \mathbb{R}^d : \|u\|_2 > \delta\}$. Dann lässt sich für $f \in C^{m+1}(\mathbb{T}, S^{d-1})$ und $p = 2$ der Fehler der Quasiinterpolation wie folgt abschätzen:*

$$\|f - Q_{S^{d-1}}^n f\|_{L^\infty(\mathbb{T}),2} \leq 2C n^{-(m+1)} \|f^{(m+1)}\|_{L^\infty(\mathbb{T}),2},$$

mit der Konstante C gegeben durch

$$C = \frac{1}{(m+1)!} \left(m+1 + \frac{(m-1)^2}{4} \right)^{m+1} \left(\sum_{k=-S}^S |\lambda_k| \right).$$

Für den Fehler der ersten Ableitung gilt

$$\|f' - (Q_{S^d}^n f)'\|_{L^\infty(\mathbb{T}),2} \leq \sqrt{d-1} C' n^{-m} \|f^{(m+1)}\|_{L^\infty(\mathbb{T}),2} + \frac{C'' C}{\delta} n^{-(m+1)} (C' n^{-m} + 1) \|f^{(m+1)}\|_{L^\infty(\mathbb{T}),2}^2,$$

dabei sind die Konstanten C' , C'' gegeben durch

$$C' = \frac{1}{(m+1)!} \left(m+1 + \frac{(m-1)^2}{4} \right)^{m+1} \left(\sum_{k=-S}^S |\lambda_k| \right) \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} |\Phi'(nx - i)| \right),$$

$$C'' = \max\{\sqrt{2}, \sqrt{d-1}\}.$$

Beweis. In Satz 3.15 hatten wir für $p = 2$ gezeigt, dass gilt

$$\|I_M f - f\|_{L^\infty(\mathbb{T}),2} \leq 2 \|I_{\mathbb{R}^d} f - f\|_{L^\infty(\mathbb{T}),p}.$$

Setzen wir die Abschätzung für die Quasiinterpolation aus Satz 2.11 ein, folgt die erste Fehlerabschätzung.

In Satz 3.17 hatten wir für $p = 2$ gezeigt, dass gilt

$$\begin{aligned} \|(I_M f)' - f'\|_{L^\infty(\mathbb{T}),2} &\leq \|dP_M\|_{L^\infty(S^{d-1}),2} \|(I_{\mathbb{R}^d} f)' - f'\|_{L^\infty(\mathbb{T}),2} \\ &+ \left(\sup_{\substack{u \in U, z \in M \\ u \neq z}} \Psi(z, u) \right) \|I_{\mathbb{R}^d} f - f\|_{L^\infty(\mathbb{T}),2} \left(\|(I_{\mathbb{R}^d} f)' - f'\|_{L^\infty(\mathbb{T}),2} + \|f'\|_{L^\infty(\mathbb{T}),2} \right). \end{aligned}$$

Die Fehler der linearen Interpolation hatten wir in den Sätzen 2.11 und 2.13 abgeschätzt. Die Konstanten $\|dP_{S^{d-1}}\|_{L^\infty(M),2}$ und $\sup \Psi(m, u)$ haben wir in den Lemmata 3.18 bzw. 3.20 berechnet. Dabei bestimmt der Fehler $\|f - Q_{S^{d-1}}^n f\|_{L^\infty(\mathbb{T}),2}$ die Umgebung U , also die Größe von δ in Lemma 3.20. Die Konstante $\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{T}),2}$ haben wir mithilfe von Lemma 3.22 umgeformt. Setzen wir das alles ein, folgt

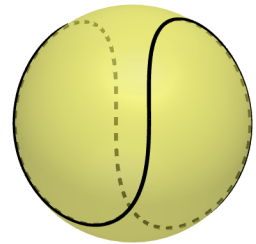
$$\begin{aligned} \|(Q_{S^d}^n f)' - f'\|_{L^\infty(\mathbb{T}),2} &\leq \sqrt{d-1} C' n^{-m} \left\| f^{(m+1)} \right\|_{L^\infty(\mathbb{T}),2} \\ &+ \frac{C''}{\delta} \left(C n^{-(m+1)} \left\| f^{(m+1)} \right\|_{L^\infty(\mathbb{T}),2} \right) \left(C' n^{-m} \left\| f^{(m+1)} \right\|_{L^\infty(\mathbb{T}),2} + \left\| f^{(m+1)} \right\|_{L^\infty(\mathbb{T}),2} \right). \end{aligned}$$

Zusammenfassen der Terme ergibt die Behauptung. \square

Wir haben gesehen, dass man zunächst fordern muss, dass die lineare Interpolierende $I_{\mathbb{R}^d}$ in einer schlauchförmigen Umgebung U aus Definition 3.11 liegen muss, damit die Projektion P_M definiert ist. Wenn wir das gesichert haben, erhalten wir bei der nichtlinearen Interpolation dieselbe Konvergenzrate wie bei der linearen Interpolation. Dabei hängt die Konstante $\sup \Psi(m, u)$ in der Abschätzung davon ab, wie wir die Umgebung U von der Mannigfaltigkeit wählen. Je kleiner die Umgebung ist, desto kleiner ist die Konstante bei der Abschätzung, desto mehr müssen wir allerdings von der linearen Interpolierenden fordern. Andersherum, wenn wir zu wenig von der linearen Interpolierenden fordern und die Umgebung U zu groß wählen, könnte die Konstante unendlich werden.

Wir wollen am Beispiel einer Funktion auf $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ diese Methode der Approximation mithilfe der Quasiinterpolation ausprobieren. Die zu approximierende Funktion $f : \mathbb{T} \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ sei eine glatte, periodische Funktion und gegeben durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0.75 \cos(2\pi x) + 0.25 \cos(6\pi x) \\ 0.75 \sin(2\pi x) - 0.25 \sin(6\pi x) \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(4\pi x) \end{pmatrix}.$$



Der Quasiinterpolationsoperator $Q_{\mathbb{R}^d}^n$ aus Kapitel 2 approximiert Funktionen $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^d$ mithilfe von B-Splines. Wir wenden diesen auf die Funktion f an und projizieren anschließend mit der Projektion P_{S^2} wieder auf S^2 . Der Fehler $\|P_M(Q_{\mathbb{R}^3}^n f) - f\|_{L^\infty(\mathbb{T}),2}$ ist links in Abbildung 3.2 für verschiedene Ordnungen m der B-Splines dargestellt. Rechts daneben ist zum Vergleich der Fehler $\|Q_{\mathbb{R}^3}^n f - f\|_{L^\infty(\mathbb{T}),2}$ der linearen Approximation zu sehen. Man sieht, dass sich diese Fehler kaum unterscheiden. Die Konvergenzordnung $m + 1$ von der Quasiinterpolation im linearen Raum, die wir in Satz 2.11 gezeigt hatten, wird bei der Approximation auf S^2 ebenfalls erreicht. In diesem Beispiel ist es tatsächlich so, dass der Fehler der nichtlinearen Approximation etwas kleiner ist als der Fehler der linearen Approximation.

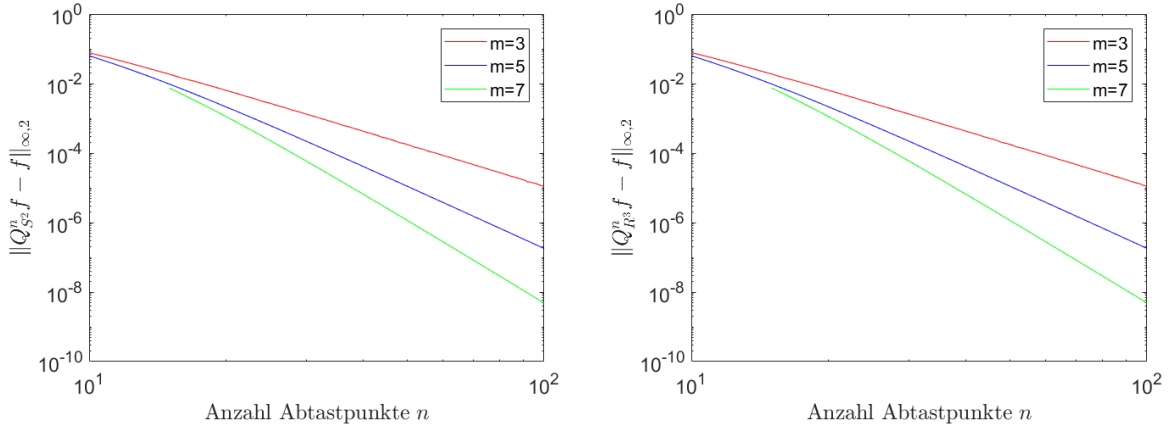


Abbildung 3.2: Approximation der Funktion f mithilfe von $Q_{S^2}^n$ bzw. $Q_{\mathbb{R}^3}^n$

Da sich die B-Splines als stückweise Polynome einfach ableiten lassen und die Matrix dP_{S^2} die Matrix aus Gleichung (3.9) ist, lässt sich mit $(Q_{S^2}^n f)'(x) = dP_M(Q_{\mathbb{R}^3} f(x)) (Q_{\mathbb{R}^3} f)'(x)$ die Ableitung f' approximieren und der Fehler $\|(Q_{S^2}^n f)' - f'\|_{L^\infty(\mathbb{T}),2}$ ist für verschiedene Ordnungen der B-Splines links in Abbildung 3.3 zu sehen. Rechts daneben ist zum Vergleich der Fehler $\|(Q_{\mathbb{R}^3}^n f)' - f'\|_{L^\infty(\mathbb{T}),2}$ der linearen Approximation abgebildet. Auch hier sieht man, dass die

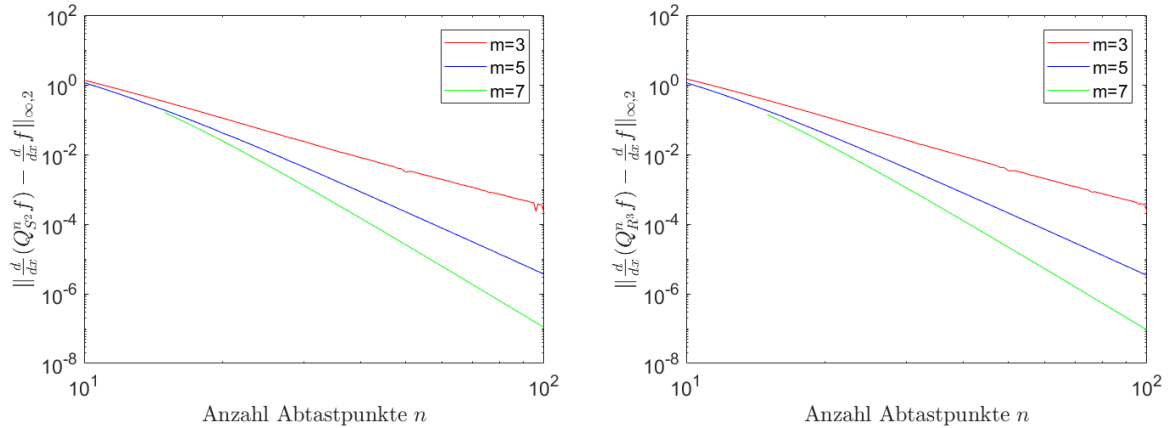


Abbildung 3.3: Approximation der Ableitung der Funktion f mithilfe von $Q_{S^2}^n$ bzw. $Q_{\mathbb{R}^3}^n$

Fehler in beiden Fällen identisch sind. Die Konvergenzrate von der linearen Quasiinterpolation wird an die Quasiinterpolation mit S^2 -wertigen Funktionen weitergegeben. Diese ist sogar besser als die, die wir in Satz 2.13 gezeigt haben. Die Verknüpfung des Quasiinterpolationsoperators $Q_{\mathbb{R}^3}$ mit der Projektion P_{S^2} führt insgesamt zu keiner Verschlechterung der Konvergenzraten.

3.4 Die Ableitung des Projektionsoperators

Wir wollen in diesem Abschnitt die Konstante $\|dP_M\|_{L^\infty(M),2}$ aus Satz 3.17 zur Approximation der Ableitung für allgemeine Mannigfaltigkeiten berechnen.

Die Projektion P_M auf die Mannigfaltigkeit erhalten wir wegen Satz 3.13 mit

$$P_M = \pi \circ E^{-1}.$$

Um die Ableitung von P_M berechnen zu können, benötigen wir die Ableitung von π und E^{-1} . Anschließend wollen wir die Kettenregel anwenden.

Definition 3.24. Seien M und \hat{M} Mannigfaltigkeiten und $F : M \rightarrow \hat{M}$ eine glatte Abbildung. Für jedes $m \in M$ definieren wir die Abbildung

$$dF_m : T_m M \rightarrow T_{F(m)} \hat{M},$$

wie folgt. Sei $v \in T_m M$, dann sei $dF_m(v)$ die Ableitung in $F(m)$, die auf $f \in C^\infty(\hat{M}, \mathbb{R})$ agiert durch die Regel

$$dF_m(v)(f) = v(f \circ F). \quad (3.12)$$

Man beachte, dass wenn $f \in C^\infty(\hat{M}, \mathbb{R})$, dann ist $f \circ F \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, sodass $v(f \circ F)$ Sinn macht. Die Abbildung dF_m bezeichnen wir als **Differential von F in m**

Mit dieser Definition können wir die Kettenregel für das Differential der Hintereinanderausführung zweier Abbildungen formulieren.

Lemma 3.25. Für Mannigfaltigkeiten M_1, M_2, M_3 und glatte Abbildungen $F : M_1 \rightarrow M_2$, $G : M_2 \rightarrow M_3$ gilt die Kettenregel

$$d(G \circ F) = dG \circ dF : T_m M_1 \rightarrow T_{(G \circ F)(m)} M_3.$$

Beweis. Sei $X \in T_m M_1$ und $f \in C^\infty(M_3, \mathbb{R})$ eine glatte Funktion mit $m \in M_1$. Einerseits wirkt $d(G \circ F)_m$ auf den Vektor X mittels

$$((d(G \circ F)_m)X)(f) = X(f \circ (G \circ F)).$$

Andererseits wirkt

$$(dG_{F(m)}) \circ (dF_m) : T_m M_1 \rightarrow T_{F(m)} M_2 \rightarrow T_{(G \circ F)(m)} M_3,$$

auf den Vektor X mittels

$$((dG_{F(m)})((dF_m)X))(f) = ((dF_m)X)(f \circ G) = X((f \circ G) \circ F).$$

Dabei ist $(dF_m)X \in T_{F(m)} M_2$ und $(f \circ G)$ ist eine glatte, reellwertige Funktion auf M_2 . \square

Jetzt wollen wir diese Theorie auf unsere Abbildungen anwenden und benötigen dazu Folgendes.

Lemma 3.26. Der Tangentialraum der Mannigfaltigkeit NM in $(m, 0)$ kann beschrieben werden durch

$$T_{(m,0)} NM = T_m M \times N_m M.$$

Beweis. Sei $t \mapsto (x(t), v(t))$ eine glatte Kurve in NM mit $x(0) = m$ und $v(0) = 0$. Es gilt

$$v(t) = P_{N_{x(t)} M} v(t),$$

da $v(t)$ in $N_{x(t)} M$ liegt. Differentiation dieser Gleichung nach t an der Stelle $t = 0$ ergibt mithilfe der Produktregel

$$v'(0) = P'_{N_{x(0)} M} v(0) + P_{N_{x(0)} M} v'(0) = P_{N_m M} v'(0).$$

Daraus folgt, dass $v'(0) \in N_m M$ und die Behauptung. \square

Wir wollen das Differential von E berechnen.

Lemma 3.27. Sei

$$E : \begin{cases} NM & \rightarrow \mathbb{R}^d \\ (m, v) & \mapsto m + v \end{cases} \quad (3.13)$$

die Abbildung aus Gleichung (3.4). Dann gilt für das Differential an der Stelle $(m, 0) \in NM$:

$$dE_{(m,0)} : \begin{cases} T_{(m,0)}NM \cong T_mM \times N_mM & \rightarrow T_m\mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^d \\ (u_1, u_2) & \mapsto u_1 + u_2 \end{cases}.$$

Beweis. Sei $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann zeigt die folgende Rechnung die Behauptung:

$$\begin{aligned} dE_{(m,0)}(X)(f) &\stackrel{(3.12)}{=} X(f \circ E) && X = (u_1, u_2) \in T_mM \times N_mM \\ &\stackrel{(3.2)}{=} \left. \frac{d(f \circ E \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0} && \gamma : t \mapsto (x(t), v(t)) \in M \times N_mM \\ &&& \text{mit } x(0) = m, v(0) = 0, x'(0) = u_1, v'(0) = u_2 \\ &\stackrel{(3.13)}{=} \left. \frac{d(f(x(t) + v(t)))}{dt} \right|_{t=0} \\ &= f'(x(0) + v(0)) (x'(0) + v'(0)) \\ &= f'(m) (u_1 + u_2) \\ &= \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0} && \gamma : t \mapsto \mathbb{R}^d \\ &= (u_1 + u_2)(f) && \text{mit } \gamma(0) = m \in \mathbb{R}^d, \gamma'(0) = u_1 + u_2 \end{aligned}$$

□

Um die von P_M zu berechnen, benötigen wir die Ableitung von E^{-1} .

Lemma 3.28. Es gilt für die Ableitung von E^{-1}

$$dE_m^{-1}(y) = (P_{T_mM}(y), P_{N_mM}(y)). \quad (3.14)$$

Beweis. Die Ableitung von E aus Lemma 3.27 ist invertierbar, wobei für $y \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$(dE_{(m,0)})^{-1}(y) = (P_{T_mM}(y), P_{N_mM}(y)),$$

da die linearen Räume T_mM und N_mM orthogonal zueinander sind. Außerdem addieren sich die Dimensionen von T_mM und N_mM zur Dimension d , sodass gilt $\mathbb{R}^d \cong T_mM \times N_mM$. Dabei ist P_{T_mM} bzw. P_{N_mM} die orthogonale Projektion auf T_mM bzw. N_mM . Da $E : U \rightarrow V$ diffeomorph ist, gilt mit dem Satz von der Umkehrabbildung für alle $y \in \mathbb{R}^d$:

$$dE_m^{-1}(y) = (dE_{(m,0)})^{-1}(y) = (P_{T_mM}(y), P_{N_mM}(y)). \quad \square$$

Genauso wie für E können wir das Differential von π berechnen.

Lemma 3.29. Sei

$$\pi : \begin{cases} NM & \rightarrow M \subset \mathbb{R}^d \\ (m, v) & \mapsto m \end{cases}$$

die in Gleichung 3.3 definierte Projektion. Dann gilt

$$d\pi_{(m,0)} : \begin{cases} T_{(m,0)}NM \cong T_mM \times N_mM & \rightarrow T_mM \subset T_m\mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^d \\ (u_1, u_2) & \mapsto u_1 \end{cases}.$$

Beweis. Sei $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Aus der Rechnung

$$\begin{aligned}
 d\pi_{(m,0)}(X)(f) &\stackrel{(3.12)}{=} X(f \circ \pi) & X &= (u_1, u_2) \in T_m M \times N_m M \\
 &\stackrel{(3.2)}{=} \left. \frac{d(f \circ \pi \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0} & \gamma : t &\mapsto (x(t), v(t)) \in T_m M \times N_m M \\
 & & & \text{mit } x(0) = m, v(0) = 0, x'(0) = u_1, v'(0) = u_2 \\
 &= \left. \frac{d(f(x(t)))}{dt} \right|_{t=0} \\
 &= f'(x(0))(x'(0)) \\
 &= f'(m)u_1 \\
 &= (u_1)(f)
 \end{aligned}$$

folgt die Behauptung. □

Mit den Lemmata 3.28 und 3.29 können wir die Ableitung von P_M in den Punkten $m \in M$ berechnen.

Satz 3.30. *Sei M Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^d und $P_M : U \rightarrow M$ die Projektion definiert in Gleichung (3.1). Dann ist P_M differenzierbar und es gilt für alle Punkte $m \in M$*

$$dP_M(m) = P_{T_m M}.$$

Beweis. Diese Eigenschaft folgt aus der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
 dP_M(m) &\stackrel{(3.5)}{=} d\pi(E^{-1}) \circ dE_m^{-1} = d\pi_{(m,0)} \circ dE_m^{-1} \\
 &= d\pi_{(m,0)}(P_{T_m M}, P_{N_m M}) = P_{T_m M}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Das Differential $dP_M(m)$ entspricht mit der Einbettung $M \subset \mathbb{R}^d$ gerade der Jacobi-Matrix der Abbildung $P_M(m)$ für $m \in M$. Dies kann man als $d \times d$ -Matrix schreiben und entspricht mit diesem Satz gerade der orthogonalen Projektion auf $T_m M$. Da $T_m M$ ein Unterraum von \mathbb{R}^d ist, gilt nach dem Satz der Orthogonalprojektion (siehe [7], Theorem V.3.4), dass $\|P_{T_m M}\| = 1$.

Satz 3.31. *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.30 gilt für die Norm $\|dP_M(m)\|_{L^\infty(M),2}$ der Ableitung*

$$\|dP_M(m)\|_{L^\infty(M),2} = \|dP_M(m)\|_2 = \|P_{T_m M}\| = 1.$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 3.30, zusammen mit der Feststellung, dass für orthogonale Projektionen im Hilbertraum auf einen abgeschlossenen Unterraum gilt, dass $\|P_{T_m M}\| = 1$. □

Die Norm aus Satz 3.31 ist die Spektralnorm, die von der euklidischen Norm induzierte Norm. In Lemma 3.18 haben wir die Frobenius-Norm der Matrix berechnet, welche eine obere Schranke für die Spektralnorm darstellt. Somit ist diese Abschätzung aus Satz 3.31 genauer und allgemein gültig für eine beliebige glatte Mannigfaltigkeit für $p = 2$. Außerdem kann das Supremum über alle $m \in M$ weggelassen werden.

3.5 Der Approximationsfehler für allgemeine Mannigfaltigkeiten

Es soll in diesem Abschnitt um die Abschätzung von

$$\Psi(z, u) = \frac{\|dP_M(u) - dP_M(z)\|_2}{\|u - z\|_2}$$

aus Definition 3.16 für $z \in M$ und $u \in U$ gehen. Wir beschäftigen uns weiterhin nur mit dem Fall $p = 2$. Deswegen ist im Folgenden mit $\|\cdot\|$ immer die euklidische Norm gemeint. Im Folgenden sei M immer eine D -dimensionale Mannigfaltigkeit, die in \mathbb{R}^d eingebettet ist. Wir wollen zunächst den Ausdruck für die Konstante vereinfachen und anschließend in den Abschnitten 3.6, 3.7 und 3.8 für einige Beispiele der Mannigfaltigkeiten abschätzen.

Wir sehen, dass wir $dP_M(m)$ für $m \in M$ schon in Satz 3.30 berechnet haben, nämlich als orthogonale Projektion auf $T_m M$. Wir wollen in diesem Abschnitt $dP_M(u)$ für $u \in U \setminus M$, also für Punkte außerhalb von M berechnen. Wenn man die Projektion P_M nicht so explizit wie für $M = S^{d-1}$ (siehe Abschnitt 3.3) gegeben hat, kann man eventuell $dP_M(u)$ für $u \in U$ nicht direkt berechnen. Deswegen wollen wir zunächst versuchen, die Konstante $\sup \Psi(z, u)$ für allgemeine Mannigfaltigkeiten M abzuschätzen. Dazu wollen wir ähnlich wie im Abschnitt vorher einen Ausdruck für $dP_M(u)$ berechnen.

Leider lässt sich für allgemeines v der Tangentialraum $T_{(m,v)} NM$ nicht mehr so einfach darstellen wie in $(m, 0)$ wie in Lemma 3.26:

Lemma 3.32. *Sei $(m, v) \in NM$, also $m \in M$ und $v \in N_m M$. Dann gilt*

$$T_{(m,v)} NM \cong T_m M \times \{N_m M + P'_{N_m M} v\}.$$

Beweis. Sei $t \mapsto (x(t), v(t))$ eine glatte Kurve in NM mit $x(0) = m$ und $v(0) = v$. Es gilt

$$v(t) = P_{N_{x(t)} M} v(t),$$

da $v(t)$ in $N_{x(t)} M$ liegt. Differentiation dieser Gleichung nach t an der Stelle $t = 0$ ergibt mithilfe der Produktregel

$$v'(0) = P'_{N_{x(0)} M} v(0) + P_{N_{x(0)} M} v'(0) = P'_{N_m M} v + P_{N_m M} v'(0).$$

Daraus folgt $v'(0) - P'_{N_m M} v \in N_m M$ und die Behauptung. □

Genauso wie in Lemma 3.27 können wir für die Abbildung

$$E : \begin{cases} NM & \rightarrow \mathbb{R}^d \\ (x, v) & \mapsto x + v \end{cases}$$

zeigen, dass gilt

$$dE_{(m,v)} : \begin{cases} T_{(m,v)} NM \cong T_m M \times \{N_m M + P'_{N_m M} v\} & \rightarrow T_{m+v} \mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^d \\ (u_1, u_2) & \mapsto u_1 + u_2 \end{cases}.$$

Diese Abbildung ist invertierbar. Mit dem Satz von der Umkehrabbildung gilt

$$dE_{m+v}^{-1}(y) = (dE_{(m,v)})^{-1}(y).$$

Genauso wie in Lemma 3.29 gilt für die natürliche Projektionsabbildung

$$\pi : \begin{cases} NM & \rightarrow M \subset \mathbb{R}^d \\ (m, v) & \mapsto m \end{cases},$$

dass

$$d\pi_{(m,v)} : \begin{cases} T_{(m,v)} NM \cong T_m M \times \{N_m M + P'_{N_m M} v\} & \rightarrow T_m M \subset T_m \mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^d \\ (u_1, u_2) & \mapsto u_1 \end{cases}.$$

Die Abbildungen lassen sich durch folgendes Diagramm zusammenfassen.

$$\begin{array}{ccc}
 U \subset \mathbb{R}^d & \xrightarrow{P_M} & M \subset \mathbb{R}^d \\
 \uparrow E & & \nearrow \pi \\
 V \subset NM & & \\
 \\
 T_{m+v}\mathbb{R}^d & \xrightarrow{dP_M} & T_m M \subset T_m \mathbb{R}^d \\
 \uparrow dE & & \nearrow d\pi \\
 T_{(m,v)}NM & &
 \end{array}$$

Für die Punkte $u \in U \setminus M$ lässt sich $dP_M(u)$ nicht einfach durch $P_{T_m M}$ ausdrücken. Wir müssen die Ableitung also anders beschreiben. Um zu untersuchen, wie die $d \times d$ -Matrix $dP_M(m+v)$ berechnet werden kann, schauen wir uns an, was das Produkt dieser Matrix mit speziellen Vektoren ergibt. Die Ableitungsmatrix P_M multipliziert mit einem Richtungsvektor ergibt immer die Richtungsableitung.

Wir haben schon in Bemerkung 3.4 gesehen, dass der Tangentialraum $T_m M$ an einen Punkt $m \in M$ ein Vektorraum der Dimension D ist. Der Normalenraum $N_m M$ ist entsprechend ein Vektorraum der Dimension $d-D$. Wir können in jedem Tangentialraum $T_m M$ eine Orthonormalbasis $\{t_i(m)\}_{i=1}^D$ wählen und eine Basis $\{n_j(m)\}_{j=1}^{d-D}$ von $N_m M$. Diese Vektoren hängen natürlich vom Punkt $m \in M$ ab. Dabei müssen die Vektoren $n_j(m)$ nicht zwingend orthonormal gewählt sein. Einen Tangentialvektor erhält man immer durch die Ableitung einer Kurve $\gamma(s)$ in M . Somit erhalten wir ein stetiges Feld von Normalen- bzw. Tangentialvektoren. Im Allgemeinen ist das Tangentialfeld nicht global stetig, wir können aber immer die Koordinaten jeweils so wählen, dass das Feld lokal stetig ist.

Wir wollen das Element $v \in N_m M$ in der Basis $\{n_j(m)\}_{j=1}^{d-D}$ darstellen durch

$$v = \sum_{j=1}^{d-D} \mu_j n_j(m). \quad (3.15)$$

Beispiel 3.33. Betrachten wir das Beispiel $M = S^{d-1} \in M$. Es gibt für jeden Punkt $m \in M$ nur einen Normalenvektor n_1 , denn S^{d-1} ist $(d-1)$ -dimensional. Der normierte Normalenvektor lässt sich einfach beschreiben durch $n_1(m) = m$. Somit haben wir ein global stetiges Normalenfeld. Der Vektor v kann somit nur ein Vielfaches von n_1 sein: $v = \mu_1 n_1(m)$.

Entsprechend gibt es in jedem Punkt eine Orthonormalbasis $\{t_i(m)\}_{i=1}^{d-1}$ von Tangentialvektoren. Für $d = 2$ gibt es immer nur einen Tangentialvektor und wir erhalten ein global stetiges Tangentialfeld. Für $d > 2$ gibt es kein global stetiges Tangentialfeld, aber wir können zum Beispiel durch lokale Wahl von Polarkoordinaten ein lokal stetiges Tangentialfeld um $m \in S^{d-1}$ erhalten.

Lemma 3.34. *Es sei $m \in M$ und $v = \sum_{j=1}^{d-D} \mu_j n_j(m)$ ein Vektor des Normalenvektorfeldes in m . Dann gilt für die Richtungsableitungen für $i = 1, \dots, D$*

$$(dP_M(m+v)) \left(t_i(m) + \sum_{j=1}^{d-D} \mu_j \nabla_{t_i(m)} n_j(m) \right) = t_i(m). \quad (3.16)$$

Es gilt für die Richtungsableitungen von $P_M(m+v)$ in Richtung der Normalenvektoren $n_j(m)$ für alle $j = 1, \dots, d-D$

$$dP_M(m+v)n_j(m) = 0. \quad (3.17)$$

Beweis. Da $P_M = \pi \circ E^{-1}$, benötigen wir zunächst die Ableitung von E . Für die Abbildung $E : NM \rightarrow U$ gilt

$$E\left(m, \sum_{j=1}^{d-D} \mu_j n_j(m)\right) = m + \sum_{j=1}^{d-D} \mu_j n_j(m)$$

Sei $\gamma_i(s)$ eine Kurve mit $\gamma_i(0) = m$ und $\dot{\gamma}_i(0) = t_i(m)$. Der Ausdruck $\left(\gamma_i(s), \sum_{j=1}^{d-D} \mu_j n_j(\gamma_i(s))\right)$ beschreibt eine Kurve in NM mit

$$\left(\gamma(0), \sum_{j=1}^{d-D} \mu_j n_j(\gamma_i(0))\right) = (m, v).$$

Da bei der Abbildung $dE : T_{(m,v)}NM \rightarrow T_{m+v}\mathbb{R}^d$ für eine Kurve in NM die Ableitung an der Stelle $s = 0$ betrachtet wird, gilt

$$dE : \left(t_i(m), \sum_{j=1}^{d-D} \mu_j \nabla_{t_i(m)} n_j(m)\right) \mapsto t_i(m) + \sum_{j=1}^{d-D} \mu_j \nabla_{t_i(m)} n_j(m).$$

Wir benötigen die Umkehrung von dieser Funktion in der ersten Komponente, denn die Abbildung $d\pi$ projiziert auf die erste Komponente. Dann gilt

$$\begin{aligned} dE^{-1} \left(t_i(m) + \sum_{j=1}^{d-1} \mu_j \nabla_{t_i(m)} n_j(m) \right) &= (dE)^{-1} \left(t_i(m) + \sum_{j=1}^{d-D} \mu_j \nabla_{t_i(m)} n_j(m) \right) \\ &= \left(t_i(m), \sum_{j=1}^{d-D} \mu_j \nabla_{t_i(m)} n_j(m) \right). \end{aligned}$$

Entsprechend gilt wegen $P_M = \pi \circ E^{-1}$

$$(dP_M(m+v)) \left(t_i(m) + \sum_{j=1}^{d-D} \mu_j \nabla_{t_i(m)} n_j(m) \right) = t_i(m).$$

Für den Beweis von Gleichung (3.17) stellen wir fest, dass für alle $v \in N_m M$ gilt $m = P_M(m) = P_M(m+v)$. Daraus folgt für die Richtungsableitung in alle Richtungen $n_j(m)$

$$(dP_M(m+v))n_j(m) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_M(m+v+hn_j(m)) - P_M(m+v)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Das ist die Behauptung. \square

Mithilfe dieses Lemmas haben wir das Produkt der Matrix dP_M mit d verschiedenen Vektoren ausgerechnet. Daraus können wir die Gestalt der Matrix ableiten.

Beispiel 3.35. Betrachten wir wieder das Beispiel $M = S^{d-1}$ wie in Beispiel 3.33. Nehmen wir eine Kurve $\gamma_i(s) \in M$ mit $\gamma_i(0) = m$ und $\dot{\gamma}_i(0) = t_i(m)$, dann gilt aufgrund der einfachen Form des Normalenvektors $\nabla_{t_i(m)} n_1 = t_i(m)$. Es lässt sich schreiben

$$t_i(m) + \mu_1 \nabla_{t_i(m)} n_1 = t_i(m) (1 + \mu_1),$$

woraus folgt

$$dP_{S^{d-1}}(m+v) ((1 + \mu_1)t_i(m)) = t_i(m).$$

Definition 3.36. Das Kronecker-Produkt $A \otimes B$ zweier Matrizen $A = (a_{ij})_{i=1,j=1}^{n_1,m_1} \in \mathbb{R}^{n_1 \times m_1}$ und $B = (b_{ij})_{i=1,j=1}^{n_2,m_2} \in \mathbb{R}^{n_2 \times m_2}$ sei definiert durch

$$A \otimes B = (a_{ij}b_{kl})_{i,j,k,l} \in \mathbb{R}^{n_1 n_2 \times m_1 m_2}.$$

Satz 3.37. Die $d \times d$ -Matrix

$$dP_M(m+v) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{d1} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix}$$

ergibt sich als Lösung des folgenden Gleichungssystems,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} I_{d \times d} \otimes n_1(m)^\top \\ \vdots \\ I_{d \times d} \otimes n_{d-D}(m)^\top \\ I_{d \times d} \otimes \left(t_1(m) + \sum_{j=1}^{d-D} \mu_j \nabla_{t_1} n_j(m) \right)^\top \\ \vdots \\ I_{d \times d} \otimes \left(t_D(m) + \sum_{j=1}^{d-D} \mu_j \nabla_{t_D} n_j(m) \right)^\top \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{d^2 \times d^2}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{dd} \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{d^2}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_D \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{d^2}}. \quad (3.18)$$

Dabei sind die ersten $d \cdot (d - D)$ Einträge der rechten Seite Null.

Beweis. Gleichung (3.17) als Matrix geschrieben ergibt

$$\begin{pmatrix} n_j(m)^\top & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & n_j(m)^\top \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{dd} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ebenso ergibt Gleichung (3.16) als Matrix geschrieben

$$\begin{pmatrix} \left(t_i(m) + \sum_{j=1}^{d-D} \mu_j \nabla_{t_i} n_j(m) \right)^\top & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \left(t_i(m) + \sum_{j=1}^{d-D} \mu_j \nabla_{t_i} n_j(m) \right)^\top \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{dd} \end{pmatrix} = t_i(m).$$

Die Gleichungen für die Normalenvektoren für $j = 1, \dots, d - D$ untereinander geschrieben und darunter die Gleichungen für die Tangentialvektoren für $i = 1, \dots, D$ ergibt gerade das Gleichungssystem in Gleichung (3.18) \square

Satz 3.38. Sei $m \in M$ und $v = \sum_{j=1}^{d-D} \mu_j n_j(m)$ ein Vektor des Normalenvektorfeldes in m . Dann gilt für die Ableitung des Projektionsoperators P_M in die Tangentialrichtungen

$$dP_M(m+v) t_i(m) = \sum_{k=1}^D (B^{-1})_{i,k} t_k(m),$$

wobei die Matrix B^{-1} die Inverse der Koeffizientenmatrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 + \langle \nabla_1 n, t_1(m) \rangle & \langle \nabla_1 n, t_2(m) \rangle & \cdots & \langle \nabla_1 n, t_D(m) \rangle \\ \langle \nabla_2 n, t_1(m) \rangle & 1 + \langle \nabla_2 n, t_2(m) \rangle & \cdots & \langle \nabla_2 n, t_D(m) \rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle \nabla_D n, t_1(m) \rangle & \langle \nabla_D n, t_2(m) \rangle & \cdots & 1 + \langle \nabla_D n, t_D(m) \rangle \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

ist. Zur Verkürzung der Schreibweise sei dabei

$$\nabla_i n = \sum_{j=1}^{d-D} \mu_j \nabla_{t_i(m)} n_j(m).$$

Beweis. Mithilfe von Gleichung (3.16) gilt

$$\begin{aligned} t_i(m) &= (dP_M(m+v)) \left(t_i(m) + \sum_{j=1}^{d-D} \mu_j \nabla_{t_i(m)} n_j(m) \right) \\ &= (dP_M(m+v)) \left(t_i(m) + \sum_{k=1}^D \left\langle \sum_{j=1}^{d-D} \mu_j \nabla_{t_i(m)} n_j(m), t_k(m) \right\rangle t_k(m) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{d-D} \left\langle \sum_{j=1}^{d-D} \mu_j \nabla_{t_i(m)} n_j(m), n_k(m) \right\rangle n_k(m) \right). \end{aligned}$$

Da $dP_M(m+v)$ eine lineare Abbildung ist und da die Richtungsableitung in die Normalenrichtungen $n_k(m)$ Null ist, fällt der hintere Teil weg:

$$\begin{aligned} t_i(m) &= (dP_M(m+v)) \left(t_i(m) + \sum_{k=1}^D \left\langle \sum_{j=1}^{d-D} \mu_j \nabla_{t_i(m)} n_j(m), t_k(m) \right\rangle t_k(m) \right) \\ &= (dP_M(m+v)) \left(\sum_{k=1}^D B_{i,k} t_k(m) \right), \end{aligned}$$

mit der Koeffizientenmatrix B aus Gleichung (3.19). Wir kennen somit das Produkt von $dP_M(m+v)$ mit einer Linearkombination der $t_i(m)$ und wollen das Produkt von $dP_M(m+v)$ mit $t_i(m)$ ausrechnen. Die Inverse dieser Koeffizientenmatrix sei mit B^{-1} bezeichnet. Dann gilt

$$dP_M(m+v) t_i(m) = \sum_{k=1}^D (B^{-1})_{i,k} t_k(m),$$

also die i -te Zeile von B^{-1} bildet die Koeffizienten vor den Vektoren t_k von $dP_M(m+v)t_i(m)$. \square

In diesem Beweis ist zu beachten, dass das Normalenvektorfeld aus den $n_k(m)$, eine orthonormale Basis des Normalenraumes $n_m M$ sein muss, damit die Rechnung stimmt. Im Gegensatz zu der Basis aus den $n_j(m)$, mit denen wir v in wie in Gleichung (3.15) darstellen, was nicht zwingend dieselbe Basis sein muss und die auch nicht zwingend orthonormal sein muss. Das ist aber kein Problem, da in der Formel für die Koeffizientenmatrix B nur die Vektoren $n_j(m)$ vorkommen, mit denen wir den Vektor v darstellen. Diese Basis können wir geschickt wählen, sodass die Matrix B möglichst einfach ist.

Beispiel 3.39. Betrachten wir wieder das Beispiel $M = S^{d-1} \in M$. In Beispiel 3.35 haben wir schon die Tangentialvektoren $t_i(m) + \mu_1 \nabla_{t_i(m)} n_1$ berechnet. Daraus folgt, dass die Matrix B eine Diagonalmatrix ist und wie folgt aussieht

$$B = \begin{pmatrix} 1 + \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 + \mu_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(d-1) \times (d-1)}.$$

Die Inverse dieser Matrix ist wieder eine Diagonalmatrix,

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\mu_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{1+\mu_1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(d-1) \times (d-1)}.$$

Allgemein lässt sich die Matrix B natürlich einfacher invertieren, wenn sie eine Diagonalmatrix ist. Wenn der Normalenraum mehr als eindimensional ist, hat man gewisse Freiheiten um die Normalenvektoren $n_j(m)$ zu wählen. Diese müssen an dieser Stelle nicht zwingend orthonormal sein. Sie müssen lediglich eine Basis von $N_m M$ bilden. Mit geschickter Wahl dieser Vektoren kann man eventuell erreichen, dass die Matrix B eine Diagonalmatrix ist. Deswegen untersuchen wir den Ausdruck $\Psi(z, u)$ aus Definition 3.16 für den Fall, dass B eine Diagonalmatrix ist. Zur Erinnerung, wir brauchen die Punkte $m, z \in M$ und $u = m + v \in U$, siehe dazu Abbildung 3.4.

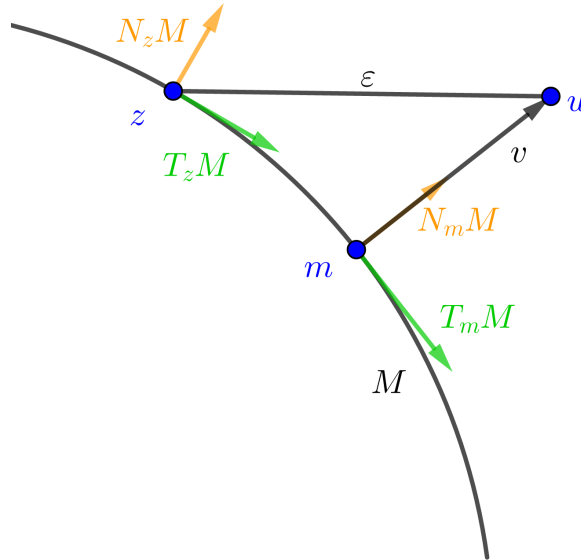


Abbildung 3.4: Lage der Punkte

Satz 3.40. Sei $u = m + v \in U$ und $z \in M$. Sei das Normalenvektorfeld $n_j(m)$ so gewählt, dass die Matrix $B = \text{diag}(b_1, \dots, b_D)$ eine Diagonalmatrix ist. Dann lässt sich der Ausdruck $\Psi(z, u)$ beschreiben durch

$$\Psi^2(z, u) = \frac{D - 2 \sum_{k=1}^D \sum_{i=1}^D \frac{1}{b_i} \langle t_k(z), t_i(m) \rangle^2 + \sum_{i=1}^D \frac{1}{b_i^2}}{\|u - z\|^2} \quad (3.20)$$

Beweis. Wir wollen den Ausdruck $\Psi^2(z, u)$ aus Definition 3.16 berechnen. Um die Frobeniusnorm $\|dP_M(z) - dP_M(u)\|_2$ im Zähler auszurechnen, können wir Lemma A.4 aus dem Anhang benutzen. Wir müssen die Norm nicht mit der Standardbasis berechnen, sondern können eine beliebige Orthonormalbasis benutzen, die den Ausdruck vereinfacht. Deswegen werden wir die Orthonormalbasis aus $\{t_i(m)\}_{i=1}^D \cup \{n_j(m)\}_{j=1}^{d-D}$ nutzen. Wir wissen aus Gleichung (3.17), dass $dP_M(m + v)$ multipliziert mit allen Normalvektoren gleich Null ist. An dieser Stelle müssen wir eine Orthonormalbasis von $N_m M$ als Normalenfeld wählen. Das kann durchaus anders sein, als das Normalenfeld mit dem wir v in Gleichung (3.15) darstellen, denn dieses muss nicht orthonormal gewählt sein, damit die Matrix B möglichst einfach ist.

Wir müssen noch die Richtungsableitungen in die Tangentialrichtungen ausrechnen. Für $z \in M$ hatten wir die Ableitung $dP_M(z)$ bereits in Satz 3.30 durch die Matrix

$$\sum_{k=1}^D t_k(z)(t_k(z))^\top$$

beschrieben. Diese müssen wir auch in die Richtungen $t(m)$ und $n(m)$ berechnen:

$$\begin{aligned} dP_M(z) t_i(m) &= \sum_{k=1}^D t_k(z) (t_k(z))^\top t_i(m) = \sum_{k=1}^D \langle t_i(m), t_k(z) \rangle t_k(z), \\ dP_M(z) n_j(m) &= \sum_{k=1}^D t_k(z) (t_k(z))^\top n_j(m) = \sum_{k=1}^D \langle n_j(m), t_k(z) \rangle t_k(z). \end{aligned}$$

Die Diagonalmatrix B^{-1} als Inverse der Diagonalmatrix B ist gegeben durch

$$B^{-1} = \text{diag} \left(\frac{1}{b_1}, \dots, \frac{1}{b_D} \right).$$

Dann gilt

$$dP_M(m+v) t_i(m) = \frac{1}{b_i} t_i(m).$$

Für den Zähler von $\Psi^2(z, u)$ müssen wir die Ableitungen in den Punkten z und $m+v$ in die Richtungen $t_i(m)$ berechnen, voneinander abziehen und die Quadrate der Normen für alle i aufsummieren. In Richtung der Vektoren $n_j(m)$ müssen wir nur die Ableitungen in z betrachten, denn in $m+v$ sind sie gerade Null. Dann lässt sich der Zähler von $\Psi^2(z, u)$ beschreiben durch

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^D \left\| \sum_{k=1}^D \langle t_k(z), t_i(m) \rangle t_k(z) - \frac{1}{b_i} t_i(m) \right\|^2 + \sum_{j=1}^{d-D} \left\| \sum_{k=1}^D \langle t_k(z), n_j(m) \rangle t_k^z \right\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^D \left(\sum_{i=1}^D \langle t_k(z), t_i(m) \rangle^2 + \sum_{j=1}^{d-D} \langle t_k(z), n_j(m) \rangle^2 \right) - 2 \sum_{k=1}^D \sum_{i=1}^D \frac{1}{b_i} \langle t_k(z), t_i(m) \rangle^2 + \sum_{i=1}^D \frac{1}{b_i^2} \\ &= D - 2 \sum_{k=1}^D \sum_{i=1}^D \frac{1}{b_i} \langle t_k(z), t_i(m) \rangle^2 + \sum_{i=1}^D \frac{1}{b_i^2}. \end{aligned}$$

Dabei folgt die letzte Gleichheit mit der Parsevalschen Gleichung, da $\{n_j(m)\}_{j=1}^{d-D} \cup \{t_i(m)\}_{i=1}^D$ ein Orthonormalsystem von \mathbb{R}^d ist, und da die Tangentialvektoren $t_i(z)$ Norm 1 haben. Daraus folgt direkt die Behauptung. \square

Die in diesem Beweis benutzten Normalenvektoren müssen nicht zwingend dieselbe Basis des Normalenraums bilden, in der v in Gleichung (3.15) dargestellt ist und mit der die Matrix B ermittelt wird. Um die Parsevalsche Gleichung anwenden zu können, müssen sie im Gegensatz zu der Basis für v aber orthonormal sein. Da der Ausdruck in Gleichung (3.20) jedoch nicht von den Normalenvektoren abhängt, müssen wir diese nicht berechnen.

Beispiel 3.41. Für unser Beispiel $M = S^{d-1}$ haben wir den Ausdruck $\Psi(z, u)$ bereits in Lemma 3.19 berechnet. Mit dem ermittelten allgemeinen Ansatz haben wir eine kürzere Methode gefunden. Beide Berechnungen kommen zu demselben Ergebnis. Betrachten wir für $d \geq 3$ die Punkte $m, z \in M$. Dann gibt es eine Geodäte, die diese beiden Punkte verbindet. Wir wählen als Tangentialvektor $t_1(m)$ bzw. $t_1(z)$ den Tangentialvektor, der die Ableitung dieser Kurve ist. Diesen Vektor können wir mit $\{t_i(m)\}_{i=2}^D$ zu einer Orthonormalbasis ergänzen. Dann gilt aufgrund der Symmetrie von S^{d-1} , dass $t_i(m) = t_i(z)$ für $i = 2, \dots, D$. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} \langle t_1(z), t_1(m) \rangle &= \langle m, z \rangle \\ \langle t_i(z), t_i(m) \rangle &= 1 \quad \text{für } i = 2, \dots, D \\ \langle t_j(z), t_i(m) \rangle &= 0 \quad \text{für } i = 2, \dots, D, j = 2, \dots, D, i \neq j. \end{aligned}$$

Der Ausdruck aus dem vorherigen Satz für $\Psi^2(z, u)$ ergibt dann

$$\begin{aligned}\Psi^2(z, u) &= \frac{d-1 - 2 \sum_{k=1}^D \sum_{i=1}^{d-1} \frac{1}{1+\mu_1} \langle t_k(z), t_i(m) \rangle^2 + \frac{d-1}{(1+\mu_1)^2}}{\|u-z\|^2} \\ &= \frac{d-1 - 2 \frac{\langle m, z \rangle^2}{1+\mu_1} - \frac{2(d-2)}{1+\mu_1} + \frac{d-1}{(1+\mu_1)^2}}{\|u\|^2 + \|z\|^2 - 2\langle m, z \rangle \|u\| \|z\|} \\ &= \frac{d-1 - 2 \frac{\langle m, z \rangle^2}{1+\mu_1} - \frac{2(d-2)}{1+\mu_1} + \frac{d-1}{(1+\mu_1)^2}}{(1+\mu_1)^2 + 1 - 2\langle m, z \rangle(1+\mu_1)}.\end{aligned}$$

Das ist mit $\|u\| = 1 + \mu_1$ und $\langle z, u \rangle = \langle z, m \rangle \|u\| = \langle z, m \rangle(1 + \mu_1)$ genau derselbe Ausdruck wie in Lemma 3.19. Für die Abschätzung dieses Terms kann man genauso vorgehen wie in Lemma 3.20 und erhält

$$\sup_{\substack{z, m \in S^{d-1}, \\ |v| \leq \mu_1}} \Psi(z, m+v) \leq \frac{\sqrt{d-1}}{1+\mu_1}.$$

Damit wird die Konstante größer, je näher μ_1 an -1 kommt, also je näher $u = m + v$ am Koordinatenursprung ist.

In den folgenden Teilabschnitten wollen wir Gleichung (3.20) nutzen um die Konstante für Beispiele von M abzuschätzen, denn eine Abschätzung für allgemeine Mannigfaltigkeiten M ist an dieser Stelle schwierig zu beschreiben.

3.6 Funktionen mit Werten auf einer Kurve in \mathbb{R}^2

Sei M eine Kurve im zweidimensionalen Raum. Wir parametrisieren diese Kurve durch die Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(s) = m$ nach der Bogenlänge. Dann ist $t_1(m) = \dot{\gamma}(s)$ ein Tangentialvektor mit $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$. Wir erhalten den Normalenvektor $n_1(m)$ durch

$$n_1(m) = \frac{\ddot{\gamma}(s)}{\|\ddot{\gamma}(s)\|},$$

wobei durch die Krümmung $\kappa(m)$ der Kurve im Punkt m durch $\|\ddot{\gamma}(s)\|$ definiert sei. Da die Kurve in \mathbb{R}^2 verläuft, gilt in allen Punkten der Kurve $\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle = 0$.

Lemma 3.42. *Sei M eine Kurve parametrisiert durch $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $m = \gamma(s)$. Außerdem sei $v = \mu_1 n_1 \in N_m M$. Dann gilt für die Koeffizientenmatrix B aus Satz 3.38*

$$B = 1 - \mu_1 \kappa(m).$$

Beweis. Für ebene Kurven gilt wegen den Frenetschen Formeln in der Ebene (siehe [5, 2B])

$$\dot{n}_1(m) = -\kappa(m) \dot{\gamma}(s).$$

Damit gilt für die Matrix B aus Gleichung (3.19)

$$B = 1 + \langle -\mu_1 \kappa(m) \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) \rangle = 1 - \kappa(m) \mu_1,$$

wobei $v = \mu_1 n_1(m)$ ein Normalenvektor ist. □

Für diese Mannigfaltigkeit können wir den Ausdruck $\Psi(z, u)$ aus Definition 3.16 berechnen.

Lemma 3.43. *Sei M eine Kurve in \mathbb{R}^2 , parametrisiert durch $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $m, z \in M$ und $v = \mu_1 n_1(m) \in N_m M$. Dann gilt*

$$\Psi^2(z, m+v) = \frac{1 + \frac{1}{(1-\mu_1 \kappa(m))^2} - 2 \frac{\langle t_1(m), t_1(z) \rangle^2}{1-\mu_1 \kappa(m)}}{\|z - (m + \mu_1 n_1(m))\|^2}. \quad (3.21)$$

Beweis. Die Matrix B ist nur eindimensional, die Inverse ist somit das Reziproke. Deswegen gilt für die Ableitung in $t_1(m)$ -Richtung

$$dP_M(m+v) \cdot t_1(m) = \frac{1}{1 - \mu_1 \kappa(m)} t_1(m),$$

und die Ableitung in $n_1(m)$ -Richtung ist Null. Da B eine Diagonalmatrix ist, können wir Satz 3.40 anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \Psi^2(z, m+v) &= \frac{1 + \frac{1}{B_{1,1}^2} - 2 \frac{\langle t_1(m), t_1(z) \rangle^2}{B_{1,1}}}{\|z - (m+v)\|^2} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{(1 - \mu_1 \kappa(m))^2} - 2 \frac{\langle t_1(m), t_1(z) \rangle^2}{1 - \mu_1 \kappa(m)}}{\|z - (m + \mu_1 n_1(m))\|^2}. \end{aligned} \quad \square$$

Für festes m, z ist dieser Term für $\mu_1 < 1$ kleiner als für $\mu_1 = 0$, denn dann ist der Zähler kleiner und der Nenner größer als für $\mu_1 = 0$. Es reicht somit $\mu_1 \geq 0$ zu betrachten. Wir hatten bereits mit Lemma 3.20 unter anderem für das Beispiel des Einheitskreises \mathbb{R}^2 gesehen, dass es für den Grenzwert $\lim_{u \rightarrow z} \Psi^2(z, u)$ verschiedene Werte gibt, je nachdem von welcher Richtung der Grenzwert betrachtet wird. Wir betrachten zunächst den Grenzwert entlang M .

Lemma 3.44. *Seien M eine Kurve in \mathbb{R}^2 und $m, z \in M$. Dann gilt für den Grenzwert von $\Psi(z, m)$ entlang von M*

$$\lim_{z \rightarrow m} \Psi^2(z, m) = 2\kappa(m)^2.$$

Beweis. Es seien $m, z \in M$ und der Schnittpunkt der Tangenten in z und m bzw. der Normalen in z und m sei bezeichnet mit T bzw. N . Der Winkel bei T sei mit ϕ bezeichnet, siehe Abbildung 3.5.

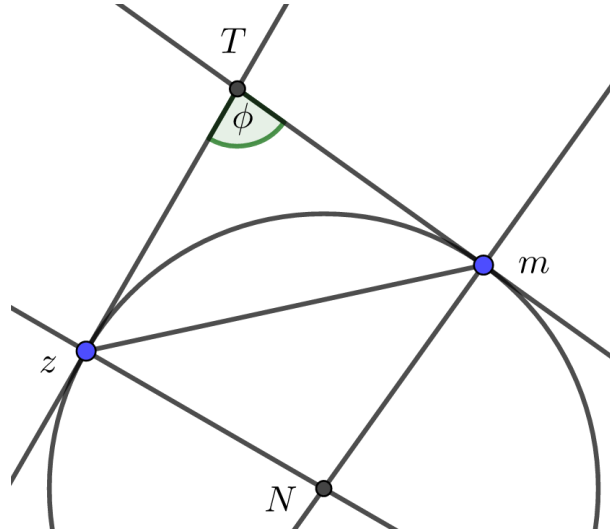


Abbildung 3.5: Lage der Punkte in Lemma 3.44

Für den Term Ψ gilt dann mithilfe von Gleichung (3.21)

$$\Psi^2(z, m) = \frac{1 + 1 - 2 \cos^2(\pi - \phi)}{\|z - m\|^2} = 2 \frac{1 - \cos^2 \phi}{\|z - m\|^2} = 2 \frac{\sin^2 \phi}{\|z - m\|^2} = 2 \frac{1}{(2R)^2}.$$

Dabei folgt die letzte Gleichheit aus dem Sinussatz für das Dreieck aus T, z und m , wobei R der Umkreisradius dieses Dreiecks ist. Da Normalen- und Tangentialvektoren senkrecht stehen, liegt der Punkt N auch auf diesem Umkreis. Das Viereck aus T, m, N und z ist somit ein Sehnenviereck

mit dem Durchmesser \overline{TN} . Für den Grenzwert $z \rightarrow m$ wird der Punkt N zum Krümmungskreis-
mittelpunkt an M in m . Dieser hat den Radius $\frac{1}{\kappa(m)}$. Daraus folgt dann $2R = \frac{1}{\kappa(m)}$. Deswegen
gilt

$$\lim_{z \rightarrow m} \Psi^2(z, m) = \lim_{z \rightarrow m} 2 \frac{1}{(2R)^2} = 2\kappa(m)^2,$$

also die Behauptung. \square

Für $\mu_1 \rightarrow \frac{1}{\kappa(m)}$ geht der Zähler von $\Psi^2(z, m + \mu_1 n_1(m))$ aus Gleichung (3.21) gegen unendlich
und der Nenner ist endlich. Deswegen können wir als Umgebung U nicht alle Punkte $m + \mu_1 n_1(m)$
mit $\mu_1 < \frac{1}{\kappa(m)}$ zulassen, denn dann wäre das Supremum von $\Psi(z, u)$ unendlich. Betrachten wir
als Umgebung U eine Umgebung mit konstantem Radius, ist dieser Radius durch die maximale
Krümmung der Kurve bestimmt. Je mehr wir die Umgebung U einschränken, also je kleiner
 μ_1 sein muss, desto kleiner ist das Supremum von Ψ . Da wir den Grenzwert in Lemma 3.44
berechnet haben, ist das Supremum von Ψ^2 auf jeden Fall größer als $2\kappa_{\max}^2$, wobei die maximale
Krümmung definiert ist durch

$$\kappa_{\max} = \max_{m \in \gamma(s)} \kappa(m).$$

Für Punkte $u \in U$ nicht auf M erhalten wir die folgende Abschätzung.

Satz 3.45. *Sei M eine Kurve in \mathbb{R}^2 , parametrisiert durch $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Weiterhin seien $m, z \in M$
und $v = \mu_1 n_1(m) \in N_m M$ mit $\mu_1 < c < \frac{1}{\kappa_{\max}}$. Dann gilt für den Ausdruck $\Psi(z, m + v)$ aus
Definition 3.16*

$$\Psi^2(z, m + \mu_1 n_1(m)) \leq \frac{\kappa_{\max}^2}{(1 - c\kappa_{\max})^2} + \frac{\pi^2 \kappa_{\max}^2}{2(1 - c\kappa_{\max})}.$$

Beweis. Es sei $\gamma(s) = m$ und $\gamma(t) = z$ mit $t \geq s$. Zuerst betrachten wir den Fall, dass $t = s$. In
diesem Fall ist $\dot{\gamma}(s) = \dot{\gamma}(t)$ und mithilfe von Gleichung (3.21) erhalten wir

$$\begin{aligned} \Psi^2(\gamma(s), \gamma(s) + \mu_1 n_1(m)) &= \frac{1 + \frac{1}{(1 - \mu_1 \kappa(m))^2} - \frac{2}{1 - \mu_1 \kappa(m)}}{\|m - u\|^2} = \frac{\left(1 - \frac{1}{(1 - \mu_1 \kappa(m))}\right)^2}{\mu_1^2} \\ &= \frac{\left(\frac{-\mu_1 \kappa(m)}{(1 - \mu_1 \kappa(m))}\right)^2}{\mu_1^2} = \frac{\kappa(m)^2}{(1 - \mu_1 \kappa(m))^2}. \end{aligned}$$

Das können wir für den Fall, dass $t \neq s$, folgendermaßen ausnutzen

$$\begin{aligned} \Psi^2(\gamma(t), \gamma(s) + \mu_1 n_1(m)) &= \frac{1 + \frac{1}{(1 - \mu_1 \kappa(m))^2} - 2 \frac{\langle \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(t) \rangle}{1 - \mu_1 \kappa(m)}}{\|\gamma(t) - (\gamma(s) + \mu_1 n_1(m))\|^2} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{(1 - \mu_1 \kappa(m))}\right)^2 + 2 \left(\frac{1 - \langle \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(t) \rangle}{1 - \mu_1 \kappa(m)}\right)}{\|\gamma(t) - (\gamma(s) + \mu_1 n_1(m))\|^2} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{(1 - \mu_1 \kappa(m))}\right)^2}{\|\gamma(t) - (\gamma(s) + \mu_1 n_1(m))\|^2} + \frac{2(1 + \langle \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(t) \rangle)(1 - \langle \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(t) \rangle)}{(1 - \mu_1 \kappa(m)) \|\gamma(t) - (\gamma(s) + \mu_1 n_1(m))\|^2} \\ &\leq \frac{\left(1 - \frac{1}{(1 - \mu_1 \kappa(m))}\right)^2}{\mu_1^2} + \frac{4(1 - \langle \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(t) \rangle)}{(1 - \mu_1 \kappa(m)) \|\gamma(t) - (\gamma(s) + \mu_1 n_1(m))\|^2}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Dabei folgt die letzte Abschätzung im ersten Term dadurch, dass $\gamma(s) + \mu_1 n_1(m)$ durch die
Projektion P_M auf $\gamma(s)$ abgebildet wird. Der Abstand von $\gamma(s) + \mu_1 n_1(m)$ zu $\gamma(s)$, welcher

gerade $|\mu_1|$ beträgt, ist kleiner ist als der Abstand zu $\gamma(t)$. Damit ist der vordere Term gerade $\Psi^2(\gamma(s), \gamma(s) + \mu_1 n_1(m))$. Für den hinteren Term benötigen wir noch die folgenden Überlegungen. Da $\dot{\gamma}$ in allen Punkten senkrecht steht auf $\ddot{\gamma}$, gilt

$$\begin{aligned} |1 - \langle \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(t) \rangle| &= \left| 1 - \left\langle \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) + \int_s^t \ddot{\gamma}(\tau) d\tau \right\rangle \right| = \left| \left\langle \dot{\gamma}(s), \int_s^t \ddot{\gamma}(\tau) d\tau \right\rangle \right| \\ &= \left| \int_s^t \langle \dot{\gamma}(s), \ddot{\gamma}(\tau) \rangle d\tau \right| = \left| \int_s^t \left\langle \dot{\gamma}(\tau) + \int_\tau^s \ddot{\gamma}(\tau') d\tau', \ddot{\gamma}(\tau) \right\rangle d\tau \right| \\ &= \left| \int_s^t \int_\tau^s \langle \ddot{\gamma}(\tau'), \ddot{\gamma}(\tau) \rangle d\tau' d\tau \right| \leq \int_s^t \int_\tau^s |\langle \ddot{\gamma}(\tau'), \ddot{\gamma}(\tau) \rangle| d\tau' d\tau \\ &\leq \int_s^t \kappa_{\max}^2 (\tau - s) d\tau \leq \frac{1}{2} \kappa_{\max}^2 (t - s)^2. \end{aligned}$$

Das können wir benutzen, um den Zähler in Gleichung (3.22) abzuschätzen. Um den Nenner abzuschätzen, benutzen wir Folgendes. Den Winkel zwischen \overline{zm} und $n_1(m)$ bezeichnen wir mit ω . Für $t \rightarrow s$ ist $\omega = \frac{\pi}{2}$. Da der Abstand $\|z - m\|$ beschränkt ist, können wir annehmen, dass ω nah an $\frac{\pi}{2}$ ist. Dann gilt

$$\|\gamma(t) - (\gamma(s) + \mu_1 n_1(m))\| \geq \sin \omega \|\gamma(t) - \gamma(s)\|.$$

Dabei können wir $\sin \omega$ nach unten abschätzen, da der Abstand $\|m - z\|$ beschränkt ist. Fordern wir, dass $\omega > \frac{\pi}{4}$, dann ist $\sin \omega > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Je näher die Krümmung von γ an 0 ist, desto näher ist $\|\gamma(t) - \gamma(s)\|$ an $(t - s)$. Im Extremfall ist γ ein Kreis mit Krümmung κ_{\max} . Wenn wir den Winkel ω wieder durch $\omega > \frac{\pi}{4}$ beschränken, gilt

$$1 \geq \frac{\|\gamma(t) - \gamma(s)\|}{t - s} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

Zusammengefasst bedeutet das

$$\|\gamma(t) - (\gamma(s) + \mu_1 n_1(m))\|^2 \geq \frac{4(t - s)^2}{\pi^2}.$$

Setzen wir die beiden Abschätzungen für Zähler und Nenner in Gleichung 3.22 ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \Psi^2(\gamma(t), \gamma(s) + \mu_1 n_1(m)) &\leq \frac{\kappa(m)^2}{(1 - \mu_1 \kappa(m))^2} + \frac{4\pi^2 \kappa_{\max}^2 (t - s)^2}{8(t - s)^2 (1 - \mu_1 \kappa(m))} \\ &= \frac{\kappa(m)^2}{(1 - \mu_1 \kappa(m))^2} + \frac{\pi^2 \kappa_{\max}^2}{2(1 - \mu_1 \kappa(m))}. \end{aligned}$$

Bilden wir jetzt das Supremum von diesem Ausdruck über $m \in M$ und $\mu_1 \leq c \leq \frac{1}{\kappa_{\max}}$, erhalten wir das Supremum gerade für m mit $\kappa(m) = \kappa_{\max}$ und $\mu_1 = c$. Damit folgt die Behauptung. \square

3.7 Funktionen mit Werten auf einer Kurve in \mathbb{R}^d

Sei M eine Kurve im d -dimensionalen Raum. Wir können ähnlich vorgehen, wie im zweidimensionalen Fall. Wir parametrisieren diese Kurve wieder durch $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ nach der Bogenlänge. Dann gibt es in jedem Punkt $m = \gamma(s) \in M$ einen normierten Tangentialvektor $t_1(m) = \dot{\gamma}(s)$, wobei $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$. Alle Vektoren in \mathbb{R}^d , die senkrecht auf diesem Vektor stehen, sind Normalenvektoren in $m \in M$. Für die Wahl dieser Normalenvektoren nutzen wir die Eigenschaften von Frenet-Kurven, siehe [5, 2.4].

Definition 3.46. Sei M eine reguläre Kurve in \mathbb{R}^d , nach Bogenlänge parametrisiert durch $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$, die d -mal stetig differenzierbar ist. Dann nennt man γ eine **Frenet-Kurve**, falls die Vektoren $\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \dots, \gamma^{(d-1)}$ in jedem Kurvenpunkt linear unabhängig sind. Das begleitende **Frenet-d-Bein** $\dot{\gamma}(s), n_1(m), n_2(m), \dots, n_{d-1}(m)$ ist dann eindeutig bestimmt durch folgende Bedingungen:

- (i) $\dot{\gamma}(s), n_1(m), n_2(m), \dots, n_{d-1}(m)$ sind orthonormiert und positiv orientiert,
- (ii) für jedes $k = 1, \dots, d-1$ gilt $\text{span}\{\dot{\gamma}(s), n_1(m), \dots, n_k(m)\} = \text{span}\{\dot{\gamma}(s), \ddot{\gamma}(s), \dots, \gamma^{(k+1)}(s)\}$,
- (iii) $\langle \gamma^{(k+1)}(s), n_k(m) \rangle > 0$.

Aufgrund der Frenet-Gleichungen (siehe [5, 2.13]) gibt es $\kappa_1, \dots, \kappa_{d-1}$ mit

$$\nabla_{\dot{\gamma}(s)} \begin{pmatrix} \dot{\gamma}(s) \\ n_1(m) \\ \vdots \\ n_{d-2}(m) \\ n_{d-1}(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}(s) \\ n_1(m) \\ \vdots \\ n_{d-2}(m) \\ n_{d-1}(m) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 & & \vdots \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & 0 & \kappa_{d-1} \\ 0 & \cdots & & 0 & \kappa_{d-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\gamma}(s) \\ n_1(m) \\ \vdots \\ n_{d-2}(m) \\ n_{d-1}(m) \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

κ_i heißt die i -te Frenet-Krümmung.

Falls eine Kurve keine Frenet-Kurve ist, bedeutet das, dass es einen konstanten Normalenvektor gibt. Die Mannigfaltigkeit liegt somit in einem linearen Unterraum. Wir können dann die Einbettung einschränken. In diesem linearen Unterraum erhalten wir eine Frenet-Kurve. Somit können wir uns auf die Betrachtung von Frenet-Kurven beschränken.

Lemma 3.47. Sei M eine Frenet-Kurve in \mathbb{R}^d , nach Bogenlänge parametrisiert durch $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $m = \gamma(s)$. Weiterhin sei $\{\dot{\gamma}(s), n_1(m), \dots, n_{d-1}(m)\}$ das Frenet-d-Bein zur Kurve im Punkt m und $v = \sum_{j=1}^{d-1} \mu_j n_j(m)$. Dann gilt für die Koeffizientenmatrix B aus Satz 3.38

$$B = 1 + \left\langle \sum_{j=1}^{d-1} \mu_j \nabla_{t_1(m)} n_j(m), t_1(m) \right\rangle = 1 - \mu_1 \kappa_1(m),$$

dabei ist $\kappa_1(m)$ die erste Frenet-Krümmung von γ .

Beweis. In unserem Fall ist $\dot{\gamma}(s)$ der einzige Tangentialvektor an die Kurve. Unter Ausnutzung der Frenet-Gleichungen aus Gleichung (3.23) gilt für das Skalarprodukt

$$\left\langle \sum_{j=1}^{d-1} \mu_j \nabla_{\dot{\gamma}(s)} n_j(m), \dot{\gamma}(s) \right\rangle = \langle \mu_1 \nabla_{\dot{\gamma}(s)} n_1(m), \dot{\gamma}(s) \rangle = -\mu_1 \kappa_1(m).$$

Es ist demnach nur ein Normalenvektor entscheidend, nämlich die Richtung $n_1(m)$, die sich aus $\langle \dot{\gamma}(s), n_1(m) \rangle = 0$ und $\text{span}\{\dot{\gamma}(s), \ddot{\gamma}(s)\} = \text{span}\{\dot{\gamma}(s), n_1(m)\}$ ergibt. Die Koeffizientenmatrix B hat dann dieselbe Gestalt wie im zweidimensionalen Fall:

$$B = 1 - \mu_1 \kappa_1(m). \quad \square$$

Ähnlich wie im zweidimensionalen Fall erhalten wir schließlich Folgendes.

Satz 3.48. Sei M eine Frenet-Kurve in \mathbb{R}^d , nach Bogenlänge parametrisiert durch $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $m = \gamma(s)$. Weiterhin sei $\{\dot{\gamma}(s), n_1(m), \dots, n_{d-1}(m)\}$ das Frenet-d-Bein zur Kurve im Punkt

m und $v = \sum_{j=1}^{d-1} \mu_j n_j(m)$ mit $\mu_1 < c < \frac{1}{\kappa_{\max}}$. Dann gilt für den Ausdruck $\Psi(z, m + v)$ aus Definition 3.16

$$\Psi^2(z, m + \mu_1 n_1(m)) \leq \frac{\kappa_{\max}^2}{(1 - c\kappa_{\max})^2} + \frac{\pi^2 \kappa_{\max}^2}{2(1 - c\kappa_{\max})}.$$

Dabei ist $\kappa_{\max} = \max \|\ddot{\gamma}(s)\|$ die maximale Krümmung der Kurve.

Beweis. Mithilfe von Satz 3.40 und Lemma 3.47 ergibt sich der Ausdruck für $\Psi^2(z, u)$ durch

$$\Psi^2(z, u) = \frac{1 + \frac{1}{(1 - \mu_1 \kappa_1(m))^2} - 2 \frac{\langle \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(t) \rangle}{1 - \mu_1 \kappa_1(m)}}{\|z - u\|^2}.$$

Das lässt sich genauso abschätzen wie in Satz 3.48. Wir benutzen in diesem Beweis, dass $\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle = 0$. Dies gilt auch für Kurven im \mathbb{R}^d , denn aus

$$|\dot{\gamma}(s)|^2 = \sum_{i=1}^d \dot{\gamma}_i(s)^2 = 1$$

folgt

$$0 = \frac{d}{ds} \sum_{i=1}^d \dot{\gamma}_i(s)^2 = 2 \sum_{i=1}^d \dot{\gamma}_i(s) \ddot{\gamma}_i(s) = 2 \langle \dot{\gamma}(s), \ddot{\gamma}(s) \rangle.$$

Das bedeutet wiederum, dass die einzige Normalenrichtung $n_1(m)$, die über die Größe des Wertes von Ψ entscheidet, gerade die Richtung von $\ddot{\gamma}(s)$ ist. Deswegen erhalten wir auch für eine Kurve in \mathbb{R}^d die Abschätzung

$$\Psi^2(z, u) \leq \frac{\kappa(m)^2}{(1 - \mu_1 \kappa(m))^2} + \frac{\pi^2 \kappa_{\max}^2}{2(1 - \mu_1 \kappa(m))},$$

mit der Krümmung $\kappa(m) = \|\dot{\gamma}(s)\|$. Ebenso wie im Beweis von Satz 3.45 erhalten wir das Supremum dieses Ausdrucks mit $\ddot{\gamma}(s) = \kappa_{\max}$ und $\mu_1 = c < \frac{1}{\kappa_{\max}}$, woraus die Behauptung folgt. \square

3.8 Funktionen mit Werten im zweidimensionalen projektiven Raum

Ein weiteres Beispiel für eine eingebettete Mannigfaltigkeit ist der projektive Raum, also die Menge aller Punkte auf der dreidimensionalen Kugel, wobei gegenüberliegende Punkte als gleich angesehen werden. Diese Mannigfaltigkeit bezeichnen wir mit S^2/\sim . Eine erste Einbettung in \mathbb{R}^9 wäre, S^2/\sim zu beschreiben durch die Menge

$$\{xx^\top \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : x \in \mathbb{R}^3, \|x\| = 1\},$$

der symmetrischen Rang 1 Matrizen, die auch als xx^\top mit normiertem $x \in \mathbb{R}^3$ geschrieben werden können. Das ist ein Beispiel für eine Einbettung der Mannigfaltigkeit, bei der man die Projektion P_M numerisch bestimmen kann. Denn von einer 3×3 -Matrix ist die Projektion auf M gerade die Matrix xx^\top , bei der x der Eigenvektor zum betragsmäßig größten Eigenwert ist. Die Ableitungsmatrix dP_M lässt sich aber nicht so leicht angeben. Man findet in dem 9-dimensionalen Raum einen linearen Unterraum, in dem die Mannigfaltigkeit liegt.

Die Mannigfaltigkeit S^2/\sim können wir in den linearen Raum der symmetrischen 3×3 -Matrizen

einbetten, welcher isomorph zu \mathbb{R}^6 ist. Die Einbettung von $x \in S^2/\sim$ mit $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$ lässt sich schreiben als

$$\mathcal{E}(x) = (x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2^2, x_2x_3, x_3^2)^\top \in \mathbb{R}^6.$$

In der Rechnung mit dieser Einbettung sehen wir, dass es geschickter ist, die Einbettung

$$m = \mathcal{E}(x) = (x_1^2, \sqrt{2}x_1x_2, \sqrt{2}x_1x_3, x_2^2, \sqrt{2}x_2x_3, x_3^2)^\top \in \mathbb{R}^6 \quad (3.24)$$

zu wählen, dann haben wir zum Beispiel den Vorteil, dass alle Punkte der Einbettung auf der Einheitskugel liegen, denn es gilt

$$\sum_{i=1}^3 x_i^4 + 2x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_3^2 + 2x_2^2x_3^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 = 1.$$

Da M zweidimensional ist, ist T_mM für jeden Punkt $m \in M$ auch zweidimensional. Wir benötigen somit für jeden Punkt $m \in M$ eine zweidimensionale Orthonormalbasis des Tangentialraumes. Dazu benutzen wir Kugelkoordinaten auf S^2 .

Sei

$$x(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \end{pmatrix} \in S^2, \quad (3.25)$$

mit $\theta \in [0, \pi]$ und $\phi \in [0, \pi)$. Diese Parametrisierung definiert Tangentialvektoren an den projektiven Raum S^2/\sim . Jetzt nutzen wir die Einbettung, um diese in \mathbb{R}^d zu definieren.

Lemma 3.49. *Sei $m = \mathcal{E}(x(\theta, \phi)) \in \mathcal{E}(S^2/\sim)$. Wählen wir als Basis in T_mM die Vektoren*

$$t_1(m) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \cos \theta \sin \theta \\ (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cos \phi \\ (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sin \phi \\ \sqrt{2} \sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi \\ 2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi \\ \sqrt{2} \sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi \end{pmatrix}, \quad t_2(m) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \\ -\sqrt{2} \sin \theta \cos \phi \sin \phi \\ \sin \theta (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \\ \sqrt{2} \sin \theta \sin \phi \cos \phi \end{pmatrix},$$

und als Basis in N_mM die Vektoren

$$n_1(m) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad n_2(m) = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta \\ \sqrt{2} \sin \theta \cos \theta \cos \phi \\ \sqrt{2} \sin \theta \cos \theta \sin \phi \\ \sin^2 \theta \cos^2 \phi \\ \sqrt{2} \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi \\ \sin^2 \theta \sin^2 \phi \end{pmatrix},$$

$$n_3(m) = \begin{pmatrix} -\sin^2 \theta \\ \sqrt{2} \cos \theta \sin \theta \cos \phi \\ \sqrt{2} \cos \theta \sin \theta \sin \phi \\ -\cos^2 \theta \\ 0 \\ -\cos^2 \theta \end{pmatrix}, \quad n_4(m) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ 2 \cos \theta \sin \theta \cos \phi \\ 2 \cos \theta \sin \theta \sin \phi \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cos^2 \phi \\ -(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cos \phi \sin \phi \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sin^2 \phi \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Koeffizientenmatrix B aus Satz 3.38 an der Stelle $m + \sum_{j=1}^4 \mu_j n_j(m)$ eine Diagonalmatrix der Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} 1 + \mu_2 + \mu_3 + \sqrt{2} \mu_4 & 0 \\ 0 & 1 + \mu_2 + \cos^2 \theta \mu_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} \mu_4 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Es ist

$$\gamma_1(s) = \begin{pmatrix} \cos^2\left(\theta + \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \\ \sqrt{2} \cos\left(\theta + \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\theta + \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \cos \phi \\ \sqrt{2} \cos\left(\theta + \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\theta + \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \sin \phi \\ \sin^2\left(\theta + \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \cos^2 \phi \\ \sqrt{2} \sin^2\left(\theta + \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \sin \phi \cos \phi \\ \sin^2\left(\theta + \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \sin^2 \phi \end{pmatrix}$$

eine Kurve in M mit $\gamma_1(0) = \mathcal{E}(x(\theta, \phi)) = m \in M$. Einen Tangentialvektor an M erhält man mit der Ableitung von γ_1 :

$$t_1(m) = \dot{\gamma}_1(0) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \cos \theta \sin \theta \\ (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cos \phi \\ (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sin \phi \\ \sqrt{2} \sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi \\ 2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi \\ \sqrt{2} \sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi \end{pmatrix}.$$

Mithilfe des trigonometrischen Pythagoras überprüfen wir die Länge dieses Vektors:

$$\|\dot{\gamma}_1(0)\|^2 = \frac{1}{2} \left(8 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 \right) = (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2 = 1.$$

Einen weiteren Tangentialvektor an M in m erhalten wir mithilfe der Kurve

$$\gamma_2(s) = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta \\ \sqrt{2} \cos \theta \sin \theta \cos\left(\phi + \frac{s}{\sqrt{2} \sin \theta}\right) \\ \sqrt{2} \cos \theta \sin \theta \sin\left(\phi + \frac{s}{\sqrt{2} \sin \theta}\right) \\ \sin^2 \theta \cos^2\left(\phi + \frac{s}{\sqrt{2} \sin \theta}\right) \\ \sqrt{2} \sin^2 \theta \sin\left(\phi + \frac{s}{\sqrt{2} \sin \theta}\right) \cos\left(\phi + \frac{s}{\sqrt{2} \sin \theta}\right) \\ \sin^2 \theta \sin^2\left(\phi + \frac{s}{\sqrt{2} \sin \theta}\right) \end{pmatrix},$$

die den Tangentialvektor

$$t_2(m) = \dot{\gamma}_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2} \sin \theta} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \cos \theta \sin \theta \sin \phi \\ \sqrt{2} \cos \theta \sin \theta \cos \phi \\ -2 \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi \\ \sqrt{2} \sin^2 \theta (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \\ 2 \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \\ -\sqrt{2} \sin \theta \cos \phi \sin \phi \\ \sin \theta (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \\ \sqrt{2} \sin \theta \sin \phi \cos \phi \end{pmatrix}$$

erzeugt. Auch von diesem Vektor können wir mit dem trigonometrischen Pythagoras die Länge berechnen:

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}_2(0)\|^2 &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \left(4 \cos^2 \phi \sin^2 \phi + (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)^2 \right) \\ &= \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)^2 \\ &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 1. \end{aligned}$$

Die beiden normierten Vektoren $t_1(m)$ und $t_2(m)$ sind Vektoren des Tangentialraumes $T_m \mathcal{E} \left(S^2 / \sim \right)$ und linear unabhängig falls θ keinen der Werte $0, \pi$ oder 2π annimmt, also falls x nicht gleich $(1, 0, 0)^\top$. In diesem Fall können wir jedoch das Koordinatensystem entsprechend drehen, sodass wir diese Fälle nicht weiter betrachten werden. Die Vektoren $t_1(m)$ und $t_2(m)$ sind orthogonal,

denn es gilt $\langle t_1, t_2 \rangle = 0$. Durch einfaches Nachrechnen ergibt, sich dass die Vektoren $n_1(m)$ und $n_2(m)$ die Länge 1 haben und dass gilt

$$\begin{aligned}\nabla_{t_1} n_1(m) &= 0, & \nabla_{t_1} n_2(m) &= t_1, \\ \nabla_{t_2} n_1(m) &= 0, & \nabla_{t_2} n_2(m) &= t_2.\end{aligned}$$

Der Vektor $n_3(m)$ hat die Länge $\sqrt{1 + \cos^4 \theta}$ und es gilt für die Ableitungen des Vektors

$$\nabla_{t_1} n_3(m) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \cos \theta \sin \theta \\ (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cos \phi \\ (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sin \phi \\ \sqrt{2} \cos \theta \sin \theta \\ 0 \\ \sqrt{2} \cos \theta \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \nabla_{t_2} n_3(m) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der vierte Normalenvektor $n_4(m)$ hat die Länge 1 und für die Ableitungen dieses Vektors gilt

$$\nabla_{t_1} n_4(m) = \begin{pmatrix} -2 \cos \theta \sin \theta \\ \sqrt{2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cos \phi \\ \sqrt{2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sin \phi \\ 2 \cos \theta \sin \theta \cos^2 \phi \\ 2\sqrt{2} \cos \theta \sin \theta \cos \phi \sin \phi \\ 2 \cos \theta \sin \theta \sin^2 \phi \end{pmatrix}, \quad \nabla_{t_2} n_4(m) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \cos \theta \sin \phi \\ \sqrt{2} \cos \theta \cos \phi \\ (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cos \phi \sin \phi \frac{1}{\sin \theta} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \frac{1}{\sin \theta} \\ -(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sin \phi \cos \phi \frac{1}{\sin \theta} \end{pmatrix}.$$

Eine kurze Rechnung ergibt, dass die Vektoren $n_1(m), n_2(m), n_3(m)$ und $n_4(m)$ linear unabhängig sind. Für

$$v = \sum_{j=1}^4 \mu_j n_j(m) \in N_m \mathcal{E} \left(S^2 / \sim \right).$$

gilt für die Skalarprodukte

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_{j=1}^4 \nabla_{t_1} n_j(m), t_1(m) \right\rangle &= \mu_2 + \mu_3 \left(4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 \right) \\ &\quad + \mu_4 \left(4\sqrt{2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \sqrt{2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 \right) \\ &= \mu_2 + \mu_3 + \sqrt{2} \mu_4, \\ \left\langle \sum_{j=1}^4 \nabla_{t_1} n_j(m), t_2(m) \right\rangle &= 0, \\ \left\langle \sum_{j=1}^4 \nabla_{t_2} n_j(m), t_1(m) \right\rangle &= 0, \\ \left\langle \sum_{j=1}^4 \nabla_{t_2} n_j(m), t_2(m) \right\rangle &= \mu_2 + \mu_3 \cos^2 \theta + \mu_4 \left(\sqrt{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right) \\ &= \mu_2 + \cos^2 \theta \mu_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} \mu_4.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Matrix B und deren Inverse durch

$$B = \begin{pmatrix} 1 + \mu_2 + \mu_3 + \sqrt{2} \mu_4 & 0 \\ 0 & 1 + \mu_2 + \cos^2 \theta \mu_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} \mu_4 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + \mu_2 + \mu_3 + \sqrt{2} \mu_4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 + \mu_2 + \cos^2 \theta \mu_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} \mu_4} \end{pmatrix}. \quad \square$$

Die Normalenvektoren, die wir gewählt haben sind zwar nicht orthogonal, aber dafür hat diese Wahl den Vorteil, dass die Koeffizientenmatrix B aus Gleichung (3.19) eine Diagonalmatrix ist. Damit können wir auch für dieses Beispiel den Wert von Ψ abschätzen.

Satz 3.50. *Sei M der projektive Raum S^2/\sim zusammen mit der Einbettung aus Gleichung (3.24). Es seien $m, z \in \mathcal{E}(S^2/\sim)$ und die Basis im Normalenraum gewählt wie in Lemma 3.49. Weiterhin sei*

$$v = \sum_{j=1}^4 \mu_j n_j(m) \in N_m \mathcal{E}(S^2/\sim)$$

mit

$$\begin{aligned} 1 + \mu_2 + \mu_3 + \sqrt{2} \mu_4 &> \beta_1 > 0, \\ 1 + \mu_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \mu_4 &> \beta_2 > 0. \end{aligned}$$

Dann lässt sich der Ausdruck Ψ aus Definition 3.16 abschätzen durch

$$\Psi^2(z, m + v) \leq \frac{2}{\beta_1^2} + \frac{1}{\beta_2^2} + \frac{8}{\beta_1(\beta_1 + \beta_2)} + \frac{2}{\beta_2(\beta_1 + \beta_2)}.$$

Beweis. Wir haben in der Parametrisierung durch Kugelkoordinaten noch Freiheiten. So haben wir in Gleichung (3.25) den Vektor $x \in S^2$ parametrisiert. Wir können diese Wahl von den Punkten m und z abhängig machen. Wir können die Kugelkoordinaten so wählen, dass m den Winkeln $\theta = \frac{\pi}{2}$ und $\phi = 0$ entspricht und dass z den Winkeln θ und $\phi = 0$ entspricht. Damit erhalten wir

$$m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta \\ \sqrt{2} \cos \theta \sin \theta \\ 0 \\ \sin^2 \theta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann vereinfachen sich die Tangential- und Normalenvektoren zu

$$\begin{aligned} t_1(m) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & t_2(m) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & t_1(z) &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \cos \theta \sin \theta \\ \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ 0 \\ \sqrt{2} \cos \theta \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & t_2(z) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \\ n_1(m) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & n_2(m) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & n_3(m) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & n_4(m) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Der Anteil von v in Richtung des Normalenvektor $n_1(m)$ hat keinen Einfluss auf den Zähler von Ψ^2 und macht den Nenner größer, also den Ausdruck Ψ^2 nur kleiner. Deswegen werden wir diese Normalenrichtung im Folgenden vernachlässigen. Für die Diagonaleinträge b_1 und b_2 der Matrix B gilt

$$\begin{aligned} b_1 &= 1 + \mu_2 + \mu_3 + \sqrt{2} \mu_4 > 0 \\ b_2 &= 1 + \mu_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \mu_4 > 0. \end{aligned}$$

Der Term Ψ^2 wird gerade dann sehr groß, wenn die Koeffizienten μ_i des Normalenvektors so gewählt sind, dass b_1 oder b_2 gegen 0 geht. Für die Skalarprodukte der Tangentialvektoren gilt

$$\begin{aligned}\langle t_1(m), t_1(z) \rangle &= \sin^2 \theta - \cos^2 \theta, & \langle t_1(m), t_2(z) \rangle &= 0, \\ \langle t_2(m), t_1(z) \rangle &= 0, & \langle t_2(m), t_2(z) \rangle &= \sin \theta.\end{aligned}$$

Für den Normalenvektor $v = \sum_{j=2}^4 \mu_j n_j(m)$ gilt

$$\|v\|^2 = \mu_2^2 + \mu_3^2 + \mu_4^2 + \sqrt{2}\mu_2\mu_4 + \sqrt{2}\mu_3\mu_4.$$

Außerdem gilt

$$u = m + v = \begin{pmatrix} -\mu_3 - \frac{1}{\sqrt{2}}\mu_4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 + \mu_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mu_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}\|z - u\|^2 &= 2 + \mu_3^2 + \mu_4^2 + \mu_2^2 + \cos^2 \theta (2\mu_3 + \sqrt{2}\mu_4) + \sin^2 \theta (-2 - 2\mu_2 - \sqrt{2}\mu_4) \\ &\quad + \sqrt{2}\mu_3\mu_4 + 2\mu_2 + \sqrt{2}\mu_4 + \sqrt{2}\mu_2\mu_4 \\ &= \|v\|^2 + \cos^2 \theta (b_1 + b_2).\end{aligned}$$

Der Ausdruck für Ψ^2 ergibt sich dann mit Gleichung (3.20) zu

$$\begin{aligned}\Psi^2(z, u) &= \frac{2 - 2 \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^2 \frac{1}{b_i} \langle t_k(z), t_i(m) \rangle^2 + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{b_i^2}}{\|u - z\|^2} \\ &= \frac{2 - \frac{2(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)^2}{b_1} - \frac{2\sin^2 \theta}{b_2} + \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2}}{\|v\|^2 + \cos^2 \theta (b_1 + b_2)} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{b_1}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{b_2}\right)^2 + 2 \frac{1 - (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)^2}{b_1} + 2 \frac{1 - \sin^2 \theta}{b_2}}{\|v\|^2 + \cos^2 \theta (b_1 + b_2)} \\ &\leq \underbrace{\frac{\left(1 - \frac{1}{b_1}\right)^2}{\|v\|^2}}_{A_1} + \underbrace{\frac{\left(1 - \frac{1}{b_2}\right)^2}{\|v\|^2}}_{A_2} + \underbrace{2 \frac{1 - (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)^2}{b_1 \cos^2 \theta (b_1 + b_2)}}_{A_3} + \underbrace{2 \frac{1 - \sin^2 \theta}{b_2 \cos^2 \theta (b_1 + b_2)}}_{A_4}\end{aligned}$$

Diese vier Terme schätzen wir jetzt einzeln ab:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{(1 - b_1)^2}{b_1^2 \|v\|^2} = \frac{(1 - b_1)^2}{b_1^2 \|v\|^2} = \frac{(\mu_2 + \mu_3 + \sqrt{2}\mu_4)^2}{b_1^2 \|v\|^2} \\
 &= \frac{\mu_2^2 + \mu_3^2 + 2\mu_4^2 + 2\mu_2\mu_3 + 2\sqrt{2}\mu_2\mu_4 + 2\sqrt{2}\mu_3\mu_4}{b_1^2 \|v\|^2} \\
 &\leq \frac{2\mu_2^2 + 2\mu_3^2 + 2\mu_4^2 + 2\sqrt{2}\mu_2\mu_4 + 2\sqrt{2}\mu_3\mu_4}{b_1^2 \|v\|^2} \leq \frac{2}{b_1^2}, \\
 A_2 &= \frac{(1 - b_2)^2}{b_2^2 \|v\|^2} = \frac{(\mu_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mu_4)^2}{b_2^2 \|v\|^2} = \frac{\mu_2^2 + \frac{1}{2}\mu_4^2 + \sqrt{2}\mu_2\mu_4}{b_2^2 \|v\|^2} \leq \frac{1}{b_2^2}, \\
 A_3 &= \frac{2 - 2\sin^4\theta - 2\cos^4\theta + 4\cos^2\theta\sin^2\theta}{b_1\cos^2\theta(b_1 + b_2)} = \frac{2 + 2\sin^2\theta - 2\cos^2\theta + 4\sin^2\theta}{b_1(b_1 + b_2)} \\
 &\leq \frac{8}{b_1(b_1 + b_2)}, \\
 A_4 &= \frac{2\cos^2\theta}{b_2\cos^2\theta(b_1 + b_2)} = \frac{2}{b_2(b_1 + b_2)}.
 \end{aligned}$$

Zusammengefasst bedeutet das

$$\Psi^2(z, u) \leq \frac{2}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2} + \frac{8}{b_1(b_1 + b_2)} + \frac{2}{b_2(b_1 + b_2)}.$$

Bilden wir das Supremum über alle $u \in U$, erhalten wir die Behauptung. \square

Wir haben damit für dieses Beispiel das Supremum von $\Psi(z, u)$ aus Satz 3.17 abschätzen können. Das hängt davon ab, wie die Umgebung U gewählt ist, also im Endeffekt von dem Fehler der linearen Interpolation. Im Gegensatz zu den vorhergehenden Beispielen haben wir hier nicht nur eine Normalenrichtung, in die die lineare Interpolation von M abweichen kann, sondern vier. Dabei bestimmen dann die Größen von b_1 und b_2 , wie groß das Supremum von Ψ werden kann.

4 Zusammenfassung

Wir haben in dieser Arbeit eine Methode zur Approximation mannigfaltigkeitswertiger Funktionen untersucht. Dabei haben wir die Mannigfaltigkeit in den linearen Raum \mathbb{R}^d eingebettet und in dem linearen Raum einen Interpolationsoperator angewendet. Anschließend haben wir das Ergebnis wieder auf die Mannigfaltigkeit projiziert. In Kapitel 2.2 haben wir den Quasiinterpolationsoperator $Q_{\mathbb{R}^d}^n$ untersucht und in den Sätzen 2.11 und 2.13 haben wir die Fehler dieser linearen Approximation abgeschätzt. In Kapitel 3 haben wir beschrieben, wie man lineare Interpolation durch Projektion auf Mannigfaltigkeiten verallgemeinern kann. Damit die Projektion P_M auf die Mannigfaltigkeit überhaupt angewendet werden kann, haben wir in Abschnitt 3.1 herausgefunden, dass es immer eine Umgebung U gibt, in der die Projektion auf die Mannigfaltigkeit wohldefiniert und glatt ist.

Mithilfe der Sätze 3.15 und 3.17 kann man die Fehler der mannigfaltigkeitswertigen Approximation abschätzen. Dabei lässt sich der Fehler $\|I_M f - f\|_{L^\infty(D),p}$ mithilfe der Dreiecksungleichung durch Satz 3.15 abschätzen gegen den Fehler der linearen Interpolation. Will man die Ableitung einer Funktion f approximieren, lässt sich der Fehler $\|(I_M f)' - f'\|_{L^\infty(D),p}$ mithilfe von Satz 3.17 abschätzen. Dieser bildete die Grundlage für die weitere Arbeit. Das Ziel war es, die darin vorkommenden Konstanten abzuschätzen. Wir haben in Abschnitt 3.4 die Konstante $\|dP_M\|_{L^\infty(M),2}$ aus diesem Satz für beliebige Mannigfaltigkeiten gegen 1 abschätzen können.

In Abschnitt 3.5 haben wir uns mit dem Ausdruck $\Psi(z, u)$ aus Satz 3.17 beschäftigt. Dieser lässt sich im Allgemeinen nicht so einfach abschätzen. Denn das Supremum über $\Psi(z, u)$ hängt von der Mannigfaltigkeit ab, aber es hängt auch von der Umgebung U ab. Wählen wir diese zu groß, kann das Supremum unendlich und der Fehler somit nicht mehr abgeschätzt werden. Es ist immer zu prüfen, ob die Werte der linearen Interpolation $I_{\mathbb{R}^d}$ in der gewünschten Umgebung U liegen, damit die Abschätzung angewendet werden kann. Es wird also keinen allgemeinen Ausdruck für allgemeine Mannigfaltigkeiten M für das Supremum von $\Psi(u, z)$ geben. Außerdem hängt diese Abschätzung von der Einbettung in den linearen Raum ab. In dem Beispiel des projektiven Raumes aus Abschnitt 3.8 haben wir nicht die intuitive Einbettung gewählt. Man könnte verschiedene Einbettungen ausprobieren und untersuchen, ob die gewählte Einbettung eine bessere Abschätzung mit sich bringt als andere Einbettungen.

Die Projektion P_M muss natürlich numerisch bestimmbar sein. In den Beispielen für S^{d-1} aus Abschnitt 3.3 oder den projektiven Raum aus Abschnitt 3.8 weiß man direkt, wie die Projektion aussehen muss. Für andere Beispiele wie eine Kurve in \mathbb{R}^d aus Abschnitt 3.7 ist es nicht direkt klar, wie die Projektion aussieht oder wie man sie numerisch berechnen kann. Für die Approximation der Ableitung wird der Ausdruck $(I_M f)' = dP_M(I_{\mathbb{R}^d})(I_{\mathbb{R}^d} f)'$ berechnet. Einerseits benötigt man für den hinteren Teil einen Interpolationsoperator, der in die differenzierbaren Funktionen abbildet. Andererseits benötigt man für den vorderen Teil die Jacobi-Matrix von P_M . In Satz 3.37 haben wir ein Gleichungssystem aufgestellt, das als Lösung die Ableitungsmatrix dP_M hat. Dafür muss man zwar den Normalen- und Tangentialraum der Mannigfaltigkeit kennen, aber man könnte untersuchen, ob man damit die Ableitung von f numerisch approximieren kann und wie das Ergebnis von der Wahl der Basen in Tangential- und Normalenraum abhängt.

Ebenso hängt die Gestalt der Koeffizientenmatrix B aus Satz 3.38 von der Wahl der Basis im Normalenraum ab. Eine Diagonalmatrix ist für die Abschätzung der Konstanten sehr hilfreich.

In Abschnitt 3.8 konnten wir für den projektiven Raum die Normalenvektoren so wählen, dass die Matrix B eine Diagonalmatrix ist. Man könnte untersuchen, ob es für beliebiges M möglich ist, das zu erreichen.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass sich mit der in dieser Arbeit untersuchten Methode mannigfaltigkeitswertige Funktionen approximieren lassen. Dabei führt die Projektion auf M zu keiner Verschlechterung der Konvergenzrate. Die Fehler dieser Approximation lassen sich mithilfe der Fehler der linearen Interpolation abschätzen. Will man insbesondere die Ableitung einer Funktion approximieren, hat man verschiedene Möglichkeiten die Einbettung sowie die Umgebung zu wählen, wobei verschiedene Ergebnisse zu erwarten sind. In dieser Arbeit konnten wir neben allgemeinen Abschätzungen die Konstanten für konkrete Mannigfaltigkeiten berechnen, was andererseits aber auch weitere spannende, untersuchenswerte Fragen aufgeworfen hat.

Anhang A

Matrixnormen

Um die Konstanten aus Satz 3.17 für verschiedene Mannigfaltigkeiten M abzuschätzen, benötigen wir Matrixnormen. Wir betrachten zunächst eine mit der p -Norm verträgliche Matrixnorm.

Lemma A.1. Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^d \in \mathbb{R}^{d \times d}$ eine Matrix. Dann ist die Matrixnorm

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i,j=1}^d |a_{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{A.1})$$

verträglich mit der p -Norm für Vektoren. Für $p = 2$ wird diese Norm als **Frobenius-Norm** bezeichnet.

Beweis. Aus der Gleichung

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p = \sup_{\|x\|_p=1} \left(\sum_{i=1}^d \left| \sum_{j=1}^d a_{ij} x_j \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d |a_{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|A\|_p$$

folgt direkt die Behauptung. \square

Der Fall $p = 2$ ist ein Spezialfall, auf den wir uns im Späteren beschränken werden. Die von der euklidischen Norm induzierte Matrixnorm ist die Spektralnorm.

Lemma A.2. Für $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ist die von der Euklidischen Norm induzierte Matrixnorm die Spektralnorm

$$\|A\|_2 = \sqrt{\mu_{\max}},$$

wobei μ_{\max} der größte Eigenwert von $A^\top A$ ist.

Beweis. Nach der Definition der euklidischen Norm und mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gilt

$$\|A\|_2^2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2^2 = \max_{\|x\|_2=1} \langle Ax, Ax \rangle = \max_{\|x\|_2=1} \langle A^\top Ax, x \rangle.$$

Die Matrix $A^\top A$ ist eine positiv semidefinite, symmetrische Matrix. Daher gibt es nach Spektralsatz eine orthogonale Matrix V , wobei die Spalten aus Eigenvektoren der Matrix bestehen, sodass $V^\top A^\top A V = D$ gilt, wobei D eine Diagonalmatrix mit den stets reellen und nichtnegativen Eigenwerten μ_1, \dots, μ_d von $A^\top A$ ist. Mit der Substitution $y = V^\top x$ gilt dann

$$\|A\|_2^2 = \max_{\|Vy\|_2=1} \langle A^\top A V y, V y \rangle = \max_{\|y\|_2=1} \langle D y, y \rangle = \max_{\|y\|_2=1} (\mu_1 |y_1|^2 + \dots + \mu_d |y_d|^2) = \mu_{\max},$$

wobei μ_{\max} der größte dieser Eigenwerte ist. \square

Dabei ist die Frobenius-Norm immer eine obere Schranke für die Spektralnorm. Abschätzungen mithilfe der Spektralnorm sind demnach im Allgemeinen genauer als Abschätzungen mithilfe der Frobenius-Norm.

Um die Konstanten aus Satz 3.17 für verschiedene Werte von p berechnen zu können, brauchen wir die Äquivalenz von Normen in \mathbb{R}^d . Diese zeigen wir in folgendem Lemma, wobei der Beweis auf der Hölder-Ungleichung beruht.

Lemma A.3. *Alle p -Normen sind äquivalent, das heißt für ein beliebiges Paar p -Normen $\|\cdot\|_p, \|\cdot\|_r$ mit $1 \leq p \leq r \leq \infty$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}^d$*

$$\|x\|_r \leq \|x\|_p \leq d^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \|x\|_r.$$

Beweis. Die linke Ungleichung gilt aufgrund der Monotonie. Für die rechte Ungleichung ergibt die Hölder-Ungleichung mit Wahl der Hölder-Exponenten $\frac{r}{p}$ und $\frac{1}{1-p/r}$ für $p, r \leq \infty$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^p \cdot 1 \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\left(\sum_{i=1}^d (|x_i|^p)^{\frac{r}{p}} \right)^{\frac{p}{r}} \cdot \left(\sum_{i=1}^d 1^{1/(1-p/r)} \right)^{1-\frac{p}{r}} \right)^{\frac{1}{p}} = d^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \|x\|_r,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Das folgende Lemma zeigt eine nützliche Eigenschaft der Frobenius-Norm.

Lemma A.4. *Sei $\{e_i\}_{i=1}^d$ eine Orthonormalbasis in \mathbb{R}^d . Dann gilt für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$:*

$$\|A\|^2 = \sum_{i=1}^d \|Ae_i\|^2.$$

Beweis. Aufgrund der Definition der Frobenius-Norm gilt für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$

$$\|A\|^2 = \sum_{i,j=1}^d a_{ij}^2 = \text{spur}(A^\top A).$$

Schreiben wir die Vektoren $\{e_i\}_{i=1}^d$ als Spalten in eine $d \times d$ -Matrix, erhalten wir eine unitäre Matrix E und es gilt

$$\begin{aligned} \|A\|^2 &= \text{spur}(A^\top A) = \text{spur}(A^\top E^\top EA) = \text{spur}((AE)^\top EA) = \|AE\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^d \|Ae_i\|^2. \end{aligned} \quad \square$$

Literaturverzeichnis

- [1] P. Absil and J. Malick. Projection-like retractions on matrix manifolds. *SIAM Journal on Optimization*, (22(1)):pp.135–158, 2012.
- [2] Charles K. Chui. *An Introduction to Wavelets*, volume I. Academic Press, Inc., 1992.
- [3] E. Gawlik and M. Leok. Embedding-based interpolation on the special orthogonal group. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2018.
- [4] P. Grohs and M. Sprecher. Projection-based quasiinterpolation in manifolds. *SAM Report 2013-23, ETH Zurich*, 2013.
- [5] Wolfgang Kühnel. *Differentialgeometrie. Kurven - Flächen - Mannigfaltigkeiten*. Vieweg & Teubner, 2010.
- [6] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2012.
- [7] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer, 2011.