

TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

BACHELORARBEIT

Euklidische Einbettungen von Quotienten der Rotationsgruppe modulo endlicher Untergruppen

Laura Lippert

Chemnitz, den 30.08.2018

Betreuer: Dr. Ralf Hielscher
Zweitgutachter: Prof. Dr. Daniel Potts

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	3
Tabellenverzeichnis	4
1 Einleitung	5
2 Grundlagen	7
2.1 Die Rotationsgruppe und Quotienten	7
2.2 Untergruppen K	8
3 Die Einbettungen der Gruppe $SO(3)/K$ in einen Vektorraum	9
3.1 Homomorphismen von $SO(3)$	9
3.2 Invariante Einbettungen	13
3.3 Translation	14
3.4 Einbettungen für spezielle Quotienten	16
3.5 Berechnung der Radien ρ_K und der Dimensionen ν_K	21
4 Abschätzungen zwischen den Abständen in $SO(3)/K$ und den Abständen in der Einbettung	28
4.1 Verbesserung der Einbettungen	29
4.2 Lokale Abschätzung	32
4.3 Globale Abschätzungen	37
5 Fazit	41
Literaturverzeichnis	43

Abbildungsverzeichnis

4.1	Zusammenhang der Abstände $d_K(R, S)$ und $d(\mathcal{E}(R), \mathcal{E}(S))$ für die verschiedene Symmetriegruppen	31
4.2	Zusammenhang der Abstände für die Symmetriegruppe $K = C_1$	38
4.3	Zusammenhang der Abstände für die Symmetriegruppe $K = C_4$ mit dem Faktor $a = 4$	40
5.1	Zusammenhang der Abstände $d_K(R, S)$ und $d(\mathcal{E}(R), \mathcal{E}(S))$ für die verschiedenen Symmetriegruppen für die verbesserten Einbettungen	42

Tabellenverzeichnis

3.1	Symmetriegruppen und Einheitsvektoren	16
3.2	Definition der Einbettungen \mathcal{E}_K	17
3.3	Werte von ρ_K^2 und Dimension ν_K	25
4.1	Die Konstanten c_{\max} und c_{\min} der Symmetriegruppe $K = C_4$ für verschiedene Faktoren a	39
5.1	Die verbesserten Einbettungen \mathcal{E}_K	41

1 Einleitung

Die Rotationsgruppe $SO(3)$ umfasst alle Drehungen um eine durch den Koordinatenursprung verlaufende Achse im dreidimensionalen Raum. Die Orientierung eines festen Objektes kann durch eine Rotation beschrieben werden, die es in die Standardlage transformiert. Die Symmetrie eines Objektes wird mathematisch als Menge aller möglichen Kongruenzabbildungen, die das Objekt auf sich selbst abbilden, beschrieben. Zusammen mit der Verkettung als Gruppenoperation ist die Symmetriegruppe eines Objektes somit eine Untergruppe $K \subset SO(3)$. Für ein symmetrisches Objekt ist die Lage also nur bis auf Multiplikation mit einem Element aus der Symmetriegruppe K bekannt.

Solche mehrdeutigen Rotationen spielen eine große Rolle in der Kristallographie, Seismologie und Biomechanik. Ein Kristall ist ein Festkörper, dessen Bausteine, z. B. Atome, Ionen oder Moleküle, regelmäßig in einer Kristallstruktur angeordnet sind. Aufgrund der regelmäßigen Anordnung der Atome bzw. Moleküle weisen Kristalle diskrete Symmetrien auf, die physikalische und chemische Parameter des Körpers bestimmen, welche in der kristallographischen Texturanalyse untersucht werden. Aus mathematischer Sicht weisen die entstehenden Quotienten $SO(3)/K$ nicht die Struktur eines Vektorraumes auf, das heißt die Addition zweier Rotationen oder die Multiplikation einer Rotation mit einem Skalar führt im Allgemeinen aus der Rotationsgruppe heraus. Es handelt sich bei den Quotienten $SO(3)/K$ um Mannigfaltigkeiten, also lokal euklidische Räume.

Viele Methoden der Optimierung, der Statistik oder der Approximationstheorie setzen Daten aus einem euklidischen Vektorraum voraus. Dabei benutzt man sehr stark die Vektorraumeigenschaften: um partielle Ableitungen zu definieren, um Optimalitätsbedingungen erster Art zu formulieren oder um ein Gradientenverfahren durchzuführen. Eine Möglichkeit, diese Methoden auf Mannigfaltigkeiten zu verallgemeinern, besteht darin, Einbettungen der Mannigfaltigkeit M in euklidische Räume zu betrachten, also Abbildungen

$$\mathcal{E} : M \rightarrow \mathbb{R}^d, \tag{1.1}$$

deren Einschränkungen auf das Bild $\mathcal{E}(M)$ Homöomorphismen sind.

Der Einbettungssatz von Whitney besagt, dass jede Mannigfaltigkeit in einen euklidischen Raum eingebettet werden kann. Folglich muss es Abbildungen der Form (1.1) mit den gewünschten Eigenschaften geben.

Grundlage dieser Arbeit bilden die in [1] definierten Einbettungen. Die Autoren haben für alle endlichen Untergruppen $K \subset SO(3)$ explizite Konstruktionen für Einbettungen

$$\mathcal{E}_K : SO(3)/K \rightarrow \mathbb{R}^d$$

angegeben. In Gleichung (3.11) leiten wir daraus ein allgemeines Konzept zur Konstruktion von Einbettungen beliebiger Quotienten $SO(3)/K$ ab. In Satz 3.7 und Satz 3.12 charakterisieren wir diese Einbettungen als Homomorphismen, also als Abbildungen, welche mit der Gruppenstruktur verträglich sind.

Das Ziel von Kapitel 3 ist es, Eigenschaften von diesen Einbettungen zu untersuchen. Zuerst zeigen wir in Satz 3.20, dass die Einbettungen wohldefiniert sind. Weiterhin beweisen wir in

Satz 3.21 die Injektivität der Einbettungen, in Satz 3.24, dass der Erwartungswert der Gleichverteilung gleich Null ist und in Satz 3.11, dass die Bilder der Einbettungen auf einer Sphäre liegen. Die Radien dieser Sphären berechnen wir in Satz 3.28. Das Bild der Einbettungen ist nicht dicht in \mathbb{R}^d , deswegen berechnen wir in 3.31 die Dimensionen der Unterräume von \mathbb{R}^d , in denen die Bilder der Einbettungen liegen.

Wir werden in Kapitel 4 feststellen, dass diese Einbettungen aus [1] Potenzial zur Verbesserung haben, denn wir beschäftigen uns in diesem Kapitel mit Abständen. Für viele Anwendungen ist es notwendig, dass Rotationen die in dem Quotient $SO(3)/K$ nahe beieinander liegen, auch in der Einbettung nahe beieinander liegen und umgekehrt auch für Rotationen, die einen großen Abstand haben. In den Diagrammen in Abbildung 4.1 ist für $R, S \in SO(3)$ der Zusammenhang der Abstände $d_K(R, S)$ in $SO(3)/K$ und $d(\mathcal{E}(R), \mathcal{E}(S))$ in der Einbettung zu dargestellt. Dabei wird deutlich, dass diese Einbettungen Abstände nicht erhalten, also nicht isometrisch sind.

John Nash bewies, dass jede Riemannsche Mannigfaltigkeit lokal isometrisch in den \mathbb{R}^d eingebettet werden kann (siehe [7]), so auch $SO(3)/K$. Später fand Matthias Günther einen neuen Weg, den Einbettungssatz zu beweisen (siehe [4]). Er hat gezeigt, dass sich jede n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit isometrisch in den Raum \mathbb{R}^d mit

$$d = \max \left\{ \frac{n(n+5)}{2}, \frac{n(n+3)}{2} + 5 \right\}$$

einbetten lässt, was im Fall der Rotationsgruppe $d = 14$ bedeutet. Der Beweis ist nicht konstruktiv. Die in dieser Arbeit betrachteten Einbettungen haben zwar meist höhere Dimensionen, aber mithilfe der Ideen aus Abschnitt 4.1 können wir die Einbettungen aus [1] so verändern, dass sie lokal isometrisch werden. Dies zeigen wir in den Sätzen 4.11 bis 4.14. Alle vorher bewiesenen Eigenschaften der Einbettungen aus [1] bleiben dabei erhalten. Die Diagramme in Abbildung 5.1 zeigen, dass bei den neuen Einbettungen der Zusammenhang der Abstände in $SO(3)/K$ und in der Einbettung deutlich verbessert werden kann.

In Abschnitt 4.3 untersuchen wir die Einbettungen auch auf globale Isometrie. Insbesondere überprüfen wir, ob sich reelle Konstanten c_{\min} und c_{\max} finden lassen, sodass die Abschätzung

$$c_{\min} \cdot d_K(R, S) \leq d(\mathcal{E}(R), \mathcal{E}(S)) \leq c_{\max} \cdot d_K(R, S)$$

gilt. In Tabelle 4.1 finden wir diese Konstanten und es zeigt sich, dass die global beste Einbettung auch die vorher ermittelte lokal isometrische Einbettung ist.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel wollen wir uns zunächst mit der Menge der Rotationen im dreidimensionalen euklidischen Raum \mathbb{R}^3 beschäftigen, welche die Grundlage für diese Arbeit bilden sollen. Wir werden untersuchen auf welche Arten man die Rotationen beschreiben kann und uns Quotienten auf der Menge der Rotationen widmen.

2.1 Die Rotationsgruppe und Quotienten

Definition 2.1. *Eine Rotation R um den Ursprung ist eine Transformation, die den Ursprung, Euklidische Abstände und die Orientierung erhält. Jede nichttriviale Rotation $R_\xi(\omega)$ im reellen dreidimensionalen Raum ist bestimmt durch eine Drehachse $\xi \in \mathbb{S}^2$ und einen Drehwinkel $\omega \in (-\pi, \pi]$.*

Die Komposition zweier Rotationen ist wieder eine Rotation, jede nichttriviale Rotation $R_\xi(\omega)$ hat eine eindeutige inverse Rotation $R_\xi(-\omega)$, und die identische Abbildung erfüllt die Definition einer Rotation. Wegen diesen Eigenschaften, zusammen mit der Assoziativität, die Rotationen erfüllen, ist die Menge der Rotationen eine Gruppe zusammen mit der Komposition. Dabei ist es eine nichtkommutative Gruppe, also die Reihenfolge in der die Rotationen ausgeführt werden, macht einen Unterschied. Zum Beispiel, eine Vierteldrehung um die positive x-Achse gefolgt von einer Vierteldrehung um die positive y-Achse ist eine andere Rotation als die, die man erhält durch Rotation erst um y und dann um x.

Jede Rotation bildet eine orthonormale Basis des \mathbb{R}^3 auf eine andere orthonormale Basis des \mathbb{R}^3 ab. Wie jede lineare Transformation von endlich dimensionalen Vektorräumen, kann jede Rotation durch eine Matrix repräsentiert werden. Sei R eine gegebene Rotation. Bezüglich der Standardbasis $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ sind die Spalten von R gegeben durch (Re_1, Re_2, Re_3) . Da die Standardbasis orthonormal ist und R Längen und Winkel erhält, formen die Spalten von R eine weitere orthonormale Basis. Diese Orthonormalitätsbedingung kann in der Form

$$R^\top R = RR^\top = I_3$$

ausgedrückt werden. Matrizen mit dieser Eigenschaft heißen orthogonale Matrizen. Zusätzlich zur Längenerhaltung müssen Rotationen die Orientierung erhalten. Eine Matrix erhält die Orientierung wenn ihre Determinante positiv ist. Für eine orthogonale Matrix R impliziert $\det R = \det R^\top$, dass $(\det R)^2 = 1$, sodass $\det R = \pm 1$. Die Untergruppe der orthogonalen Matrizen mit Determinante 1 heißt auch spezielle orthogonale Gruppe $SO(3)$. Das führt uns zu folgendem Satz.

Satz 2.2. *Jede Rotation kann eindeutig als orthogonale 3×3 -Matrix mit Determinante 1 dargestellt werden. Außerdem, da Komposition von Rotationen mit der Matrizenmultiplikation korrespondiert, ist die Rotationsgruppe isomorph zur speziellen orthogonalen Gruppe $SO(3)$.*

Betrachten wir die Lage von festen Objekten im dreidimensionalen Raum, kann diese beschrieben werden durch eine Rotation, die das Objekt in die Standardlage bringt. Wenn das Objekt asymmetrisch ist, dann ist diese Rotation eindeutig, sodass die Lage des Objektes zu einem Element der Gruppe $SO(3)$ gehört. Für ein symmetrisches Objekt ist diese Drehung nur bis auf Multiplikation mit Elementen der Symmetriegruppe bekannt, das heißt es ist nicht möglich eine Rotation X von Xk für k aus einer Untergruppe K von $SO(3)$ zu unterscheiden. Das motiviert

uns dazu, auf der Rotationsgruppe Äquivalenzklassen einzuführen. Dabei sehen wir zwei Rotationen $R_1, R_2 \in SO(3)$ als äquivalent an, wenn ein $k \in K$ existiert, sodass $R_1 = R_2 k$. Wir werden uns hier auf endliche Symmetriegruppen K beschränken.

Definition 2.3. Sei $K \subset SO(3)$ eine endliche Untergruppe der Rotationsgruppe. Das ist die Menge der Rotationen, die keinen sichtbaren Einfluss auf ein Objekt haben. Dann korrespondiert die Lage des Objektes mit einem Element aus dem Quotientenraum

$$SO(3)/K = \{[R]_K \mid R \in SO(3)\},$$

wobei

$$[R]_K = \{Rk \mid k \in K\}.$$

Das heißt der Quotientenraum entspricht der Menge der Äquivalenzklassen von Elementen von $SO(3)$ unter der Rechtsmultiplikation von Elementen aus K . Da $SO(3)$ nicht kommutativ ist, muss man Links- und Rechtsnebenklassen unterscheiden.

Bemerkung 2.4. Der Quotient $SO(3)/K$ ist eine Mannigfaltigkeit, das heißt $SO(3)$ ist ein topologischer Raum, der lokal einem euklidischen Raum gleicht.

2.2 Untergruppen K

In dieser Arbeit wollen wir uns ausschließlich mit endlichen Untergruppen $K \subset SO(3)$ beschäftigen. Wenn eine Drehung um $\frac{2\pi}{a}$ um eine Achse $u \in \mathbb{S}^2$ in K liegt, liegen auch alle Vielfachen davon, also Drehungen um $\frac{2\pi}{a} \cdot b$ mit $b \in \mathbb{N}$ in K , da K eine Untergruppe ist. Damit K endlich ist, muss a eine natürliche Zahl sein. Damit erhalten wir, dass u eine a -zählige Achse in der Symmetriegruppe K ist. Da wir verschiedene Achsen mit verschiedenen Zähligkeiten kombinieren können, wobei $|K|$ weiterhin endlich bleiben soll, erhalten wir verschiedene Symmetriegruppen K .

Alle endlichen Untergruppen von $SO(3)$ werden auch als Punktgruppen erster Art bezeichnet. Die Klassifizierung in [6, S. 27-32] sagt, dass jede Gruppe isomorph ist zu einer der folgenden: die zyklischen Gruppen C_r für $r \in 1, 2, \dots$, die Diedergruppen D_r für $r \in 2, 3, \dots$, die Tetraedergruppe T , die Oktaedergruppe O und die Ikosaedergruppe Y .

Aufgrund des Neumannschen Prinzips bestimmt die Punktgruppe die makroskopischen Eigenschaften des Körpers. Die vollständige mögliche Symmetrie einer Kristallstruktur wird mit den 230 kristallographischen Raumgruppen beschrieben. Zusätzlich zu den Symmetrieeoperationen der Punktgruppen kommen hier auch Translationen in Form von Schraubungen und Gleitspiegelungen als Symmetrieeoperationen vor. Zur Beschreibung der Symmetrie eines makroskopischen Monokristalls genügen dagegen die Punktgruppen, da es sich bei Kristallen stets um konvexe Polyeder handelt und mögliche interne Translationen in der Struktur makroskopisch nicht erkennbar sind. Streicht man alle Translationen und ersetzt zusätzlich die Schraubenachsen und Gleitspiegelebenen durch entsprechende Drehachsen und Spiegelebenen, so erhält man die sogenannte geometrische Kristallklasse des Kristalls. Als Kristallklassen kommen daher nur solche Punktgruppen in Frage, deren Symmetrie mit einem unendlich ausgedehnten Gitter vereinbar ist. In einem Kristall sind nur 6-, 4-, 3- und 2-zählige Drehachsen möglich, also Drehungen um 60, 90, 120 bzw. 180 Grad und jeweils Vielfache davon. Die dreidimensionalen Punktgruppen in denen keine oder ausschließlich 2-, 3-, 4- und/oder 6-zählige Drehachsen vorkommen bezeichnet man daher als kristallographische Punktgruppen. Insgesamt gibt es 32 kristallographische Punktgruppen. Das Beugungsbild von Kristallen bei Strukturanalysen mithilfe von Röntgenbeugung enthält gemäß dem Friedelschen Gesetz immer ein Inversionszentrum. Daher können Kristalle aus den Beugungsdaten nicht direkt einer der 32 kristallographischen Punktgruppen zugeordnet werden, sondern nur einer der 11 sogenannten Lauegruppen. Das sind gerade die Gruppen $C_1, C_2, C_3, C_4, C_6, D_2, D_3, D_4, D_6, O$ sowie T , welche die Orientierung des Kristalls erhalten.

3 Die Einbettungen der Gruppe $SO(3)/K$ in einen Vektorraum

Da $SO(3)$ eine Mannigfaltigkeit ist, kann man nicht die Strukturen eines Vektorraumes benutzen. Man kann zum Beispiel nicht einfach ein arithmetisches Mittel berechnen, denn Addition und Multiplikation mit Skalaren in $SO(3)$ führen im Allgemeinen aus der Mannigfaltigkeit heraus. Um auf der Mannigfaltigkeit $SO(3)/K$ besser arbeiten zu können, ist die Idee dieser Arbeit, Einbettungen in einen Vektorraum zu betrachten.

Definition 3.1. Eine Abbildung $E : X \rightarrow Y$ zwischen zwei topologischen Räumen X und Y heißt Einbettung, wenn E ein Homöomorphismus von X auf den Unterraum $E(X)$ seines Bildes ist. Dabei bezeichnet ein Homöomorphismus eine bijektive, stetige Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist.

Ziel dieses Kapitels soll es sein, die in [1] definierten Einbettungen von $SO(3)/K$ in den Vektorraum \mathbb{R}^d zu untersuchen.

3.1 Homomorphismen von $SO(3)$

In diesem Kapitel wollen wir zunächst grundlegende Ideen für Einbettungen in den Vektorraum \mathbb{R}^d untersuchen. Mit deren Hilfe werden wir dann im nächsten Kapitel auf die jeweilige Symmetriegruppe K angepasste Einbettungen definieren. Wir wollen hier in den Euklidischen Vektorraum \mathbb{R}^d einbetten, das heißt, der \mathbb{R}^d ist im Folgenden immer ausgestattet mit der euklidischen Norm

$$\|x\| = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^d x_i^2\right)} \text{ für alle } x = (x_i)_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d \tag{3.1}$$

und dem zugehörigen Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = x^\top y \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^d. \tag{3.2}$$

Wir wollen das Konzept von Tensoren für die Einbettungen benutzen.

Definition 3.2. Für endlichdimensionale Vektorräume V_1, \dots, V_m mit Basen $B_i = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_{n_i}}\}$ zu V_i kann das Tensorprodukt direkt als Raum von Matrizen konstruiert werden. Das Tensorprodukt von Vektoren $v_1 \in V_1, \dots, v_m \in V_m$

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_m$$

ist diejenige Matrix, deren Eintrag an der i_1, \dots, i_m -ten Stelle gerade das Produkt über i von 1 bis m der i_j -Koordinate von v_j bezüglich der Basis B_i ist. Dabei ist die Abbildung

$$\otimes : V_1 \times \dots \times V_m \rightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_m, \quad (v_1, \dots, v_m) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_m$$

multilinear.

In unserem Fall sind die Vektorräume $V_i = \mathbb{R}^3$. Zur Vereinfachung schreiben wir für das r -fache Tensorprodukt eines Vektors $x = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ mit sich selbst $\otimes^r x$. Man kann sich

das Tensorprodukt $\otimes^r x$ dann als r -te Potenz von x vorstellen, wobei eine $\underbrace{3 \times \cdots \times 3}_{r\text{-mal}}$ -Matrix entsteht. Das r -fache Tensorprodukt $\otimes^r x$ hat dann den (j_1, \dots, j_r) -ten Eintrag

$$(\otimes^r x)_{j_1, \dots, j_r} = \prod_{k=1}^r x_{j_k}, \quad 1 \leq j_1, \dots, j_r \leq 3, \quad (3.3)$$

zum Beispiel $\otimes^2 x = xx^\top \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Definition 3.3. Für einen beliebigen Vektor $u \in \mathbb{R}^3$ mit $\|u\| = 1$ und $r \in \mathbb{N}$ definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_u^r : SO(3) &\rightarrow \mathbb{R}^{(3^r)}, \\ \mathcal{E}_u^r(R) &= \otimes^r (Ru). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Bemerkung 3.4. Der Tensor $\otimes^r (Ru)$ ist zunächst eine Matrix. Schreiben wir die Elemente des Tensors bzw. der Matrix spaltenweise untereinander, entsteht ein Vektor in \mathbb{R}^{3^r} . Diese Abbildung, die einem Tensor den entsprechenden Vektor zuordnet, bezeichnen wir mit vec .

Da unsere Einbettung in den euklidischen Raum führt, wäre es schön, wenn wir ausgehend von einer Rotation R die Einbettung $\mathcal{E}(R)$ statt durch die Berechnung eines Tensorproduktes durch eine Matrixmultiplikation berechnen könnten. Dazu dient das folgende Konzept einer Darstellung.

Definition 3.5. Eine Darstellung Φ einer Gruppe G ist ein Homomorphismus von G in die Automorphismengruppe $\text{Aut}(W)$ von einer gegebenen Struktur W . Die Gruppenverknüpfung entspricht dem Hintereinanderausführen von Automorphismen, also

$$\Phi(gh) = \Phi(g)\Phi(h).$$

Eine lineare Darstellung ist eine Darstellung durch Automorphismen eines Vektorraumes V . Eine lineare Darstellung ist somit ein Homomorphismus von G in die allgemeine Gruppe $\mathcal{L}(V)$.

Wir werden zeigen, dass eine solche Darstellung in den Raum \mathbb{R}^{3^r} existiert. Dazu zeigen wir zunächst folgendes Lemma.

Lemma 3.6. Es sei vec die Abbildung, die einem Tensor einen Vektor zuordnet, indem alle Einträge spaltenweise untereinander geschrieben werden. Das Kronecker-Produkt $A \otimes B$ zweier Matrizen $A = (a_{ij})_{i=1, j=1}^{n_1, m_1} \in \mathbb{R}^{n_1 \times m_1}$ und $B = (b_{ij})_{i=1, j=1}^{n_2, m_2} \in \mathbb{R}^{n_2 \times m_2}$ sei definiert durch

$$A \otimes B = (a_{ij} b_{kl})_{(i,j),(k,l)} \in \mathbb{R}^{n_1 n_2 \times m_1 m_2},$$

und abkürzend schreiben wir auch $\otimes^r A = \overbrace{A \otimes \cdots \otimes A}^{r\text{-mal}}$. Dann gilt

$$\text{vec}(\otimes^r (Ru)) = (\otimes^r R) \cdot (\text{vec}(\otimes^r u)). \quad (3.5)$$

für alle $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und $u \in \mathbb{R}^3$.

Beweis. Wir wollen dieses Lemma mithilfe von vollständiger Induktion über r beweisen. Dazu nehmen wir $u = (u_1, u_2, u_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ und

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Der Vektor Ru sieht dann so aus:

$$\begin{pmatrix} r_{11}u_1 + r_{12}u_2 + r_{13}u_3 \\ r_{21}u_1 + r_{22}u_2 + r_{23}u_3 \\ r_{31}u_1 + r_{32}u_2 + r_{33}u_3 \end{pmatrix}.$$

Zunächst der Induktionsanfang:

Für $r = 1$ ist

$$\text{vec}(\otimes^1(Ru)) = Ru = R(u) = (\otimes^1 R) (\text{vec}(\otimes^1 u)).$$

Jetzt zum Induktionsschritt:

Um aus dem r -fachen Tensorprodukt $\otimes^r x$ das $(r+1)$ -fache Tensorprodukt $\otimes^{r+1} x$ zu erhalten, muss $\otimes^r x$ mit jedem Element von x einmal multipliziert werden und diese drei Tensoren bilden zusammen den Tensor $\otimes^{r+1} x$ und können mit vec zu einem Vektor gemacht werden. Aus diesem Grund gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{3^{r+1}} \ni \text{vec}(\otimes^{r+1}(Ru)) &= \begin{pmatrix} (r_{11}u_1 + r_{12}u_2 + r_{13}u_3) \cdot (\text{vec}(\otimes^r u)) \\ (r_{21}u_1 + r_{22}u_2 + r_{23}u_3) \cdot (\text{vec}(\otimes^r u)) \\ (r_{31}u_1 + r_{32}u_2 + r_{33}u_3) \cdot (\text{vec}(\otimes^r u)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r_{11} \cdot \otimes^r R & r_{12} \cdot \otimes^r R & r_{13} \cdot \otimes^r R \\ r_{21} \cdot \otimes^r R & r_{22} \cdot \otimes^r R & r_{23} \cdot \otimes^r R \\ r_{31} \cdot \otimes^r R & r_{32} \cdot \otimes^r R & r_{33} \cdot \otimes^r R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \cdot \text{vec}(\otimes^r u) \\ u_2 \cdot \text{vec}(\otimes^r u) \\ u_3 \cdot \text{vec}(\otimes^r u) \end{pmatrix} \\ &= R \otimes (\otimes^r R) \cdot \text{vec}(\otimes^{r+1} u) \\ &= (\otimes^{r+1} R) \cdot \text{vec}(\otimes^{r+1} u). \end{aligned}$$

□

Satz 3.7. Sei $\mathcal{E}_u^r : SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^{3^r}$ wie in (3.4). Dann definiert

$$\Phi : SO(3) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^{3^r})$$

mit

$$\Phi(R) = \otimes^r R$$

eine Darstellung von $SO(3)$ mit der Eigenschaft, dass für alle $S \in SO(3)/K$ gilt

$$\mathcal{E}(RS) = \Phi(R) \cdot \mathcal{E}(S). \quad (3.6)$$

Beweis. Mithilfe der Definition der Einbettung (3.4) und einsetzen von Su statt u in Lemma 3.6 folgt die Aussage sofort. □

Bemerkung 3.8. Eine Wirkung auf der Gruppe $SO(3)$ auf die Menge \mathbb{R}^{3^r} ist eine Verknüpfung

$$\triangleright : SO(3) \times \mathbb{R}^{3^r} \rightarrow \mathbb{R}^{3^r}, (R, x) \mapsto R \triangleright x$$

mit folgenden Eigenschaften:

- $(I_3, x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^{3^r}$,
- $(RS) \triangleright x = R \triangleright (S \triangleright x)$ für alle $R, S \in SO(3)$ und $x \in \mathbb{R}^{3^r}$.

Im betrachteten Fall ist Φ eine Wirkung auf $SO(3)$ mit $R \triangleright x = \Phi(R) \cdot x$.

Definition 3.9. Ein Homomorphismus auf der Gruppe $SO(3)$ ist eine Abbildung $\mathcal{E} : SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^{3^r}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $R, S \in SO(3)$ gilt

$$\mathcal{E}(RS) = R \triangleright \mathcal{E}(S) = \Phi(R) \cdot \mathcal{E}(S).$$

Wenn wir das Bild $\mathcal{E}(R)$ mithilfe von vec als Vektor auffassen, haben wir im euklidischen Raum \mathbb{R}^d das euklidische Skalarprodukt aus (3.2) und die euklidische Norm aus (3.1). Wenn wir hingegen das Bild als $3 \times \dots \times 3$ -Tensor auffassen, ist dazu äquivalent das Frobenius-Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^3 x_{j_1, \dots, j_r} \cdot y_{j_1, \dots, j_r} = (\text{vec } x)^\top (\text{vec } y) \quad (3.7)$$

für $x, y \in \mathbb{R}^{3 \times \dots \times 3}$ und die Frobenius-Norm

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{j_1, \dots, j_r=1}^3 x_{j_1, \dots, j_r}^2} = \|\text{vec } x\| \quad (3.8)$$

für $x \in \mathbb{R}^{3 \times \dots \times 3}$. Damit wollen wir den folgenden Satz beweisen, der aussagt, dass das Bild der Einbettungen immer auf einer Kugeloberfläche im \mathbb{R}^d liegt. Dafür brauchen wir zunächst noch dieses Lemma.

Lemma 3.10. *Das Kronecker Produkt $\otimes^r R$ einer orthogonalen Matrix R ist orthogonal.*

Beweis. Wieder benutzen wir die Technik der vollständigen Induktion über r , um zu beweisen, dass $\otimes^r R$ orthogonal ist.

Induktionsanfang: Für $r = 1$ ist R orthogonal.

Induktionsschritt: Es gilt

$$\otimes^{r+1} R = (\otimes^r R) \otimes R = \begin{pmatrix} r_{11} \otimes^r R & r_{12} \otimes^r R & r_{13} \otimes^r R \\ r_{21} \otimes^r R & r_{22} \otimes^r R & r_{23} \otimes^r R \\ r_{31} \otimes^r R & r_{32} \otimes^r R & r_{33} \otimes^r R \end{pmatrix}.$$

Wir bezeichnen mit R_i beziehungsweise \tilde{R}_i^r die i -te Spalte der Matrix R beziehungsweise $\otimes^r R$ und betrachten $i = 3(k_1 - 1) + k_2, j = 3(l_1 - 1) + l_2 \in \{1, \dots, 9\}$ mit $k_1, k_2, l_1, l_2 \in \{1, 2, 3\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle \tilde{R}_i^{r+1}, \tilde{R}_j^{r+1} \rangle &= \langle r_{1k_1} \tilde{R}_{k_2}^r, r_{1l_1} \tilde{R}_{l_2}^r \rangle + \langle r_{2k_1} \tilde{R}_{k_2}^r, r_{2l_1} \tilde{R}_{l_2}^r \rangle + \langle r_{3k_1} \tilde{R}_{k_2}^r, r_{3l_1} \tilde{R}_{l_2}^r \rangle \\ &= (r_{1k_1} r_{1l_1} + r_{2k_1} r_{2l_1} + r_{3k_1} r_{3l_1}) \langle \tilde{R}_{k_2}^r, \tilde{R}_{l_2}^r \rangle \\ &= \langle R_{k_1}, R_{l_1} \rangle \langle \tilde{R}_{k_2}^r, \tilde{R}_{l_2}^r \rangle \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } k_1 \neq l_1 \text{ oder } k_2 \neq l_2 \\ 1 & \text{für } k_1 = l_1 \text{ und } k_2 = l_2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}. \end{aligned}$$

Analog gilt das auch für die Zeilen. □

Also ist $\Phi(R)$ aus Satz 3.7 eine orthogonale Matrix. Daraus erhalten wir diesen Satz:

Satz 3.11. *Es gilt*

$$\|\mathcal{E}_u(R)\|^2 = \|\mathcal{E}_u(I_3)\|^2 =: \rho^2 \quad (3.9)$$

für alle Rotationen $R \in SO(3)$ und die Einbettung \mathcal{E}_u aus (3.4), wobei $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(3)$

die Identität ist, siehe Anhang von [1].

Beweis. Nach Satz 3.7 gibt es zu jedem $R \in SO(3)$ ein $\Phi(R)$ mit der Eigenschaft (3.6). Da $\Phi(R)$ nach Lemma 3.10 eine orthogonale Matrix ist, folgt

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}_u(R)\|^2 &= \langle \mathcal{E}_u(R), \mathcal{E}_u(R) \rangle = \langle \Phi(R)\mathcal{E}_u(I_3), \Phi(R)\mathcal{E}_u(I_3) \rangle \\ &= \langle \mathcal{E}_u(I_3), \mathcal{E}_u(I_3) \rangle = \|\mathcal{E}_u(I_3)\|^2. \end{aligned}$$

□

Bisher haben wir nur ein Element $u \in \mathbb{R}^3$ mit Länge 1 betrachtet. Um die Gruppe $SO(3)$ oder Quotienten $SO(3)/K$ einzubetten, brauchen wir aber im Allgemeinen mehrere Vektoren u , deswegen soll das allgemeine Konzept im nächsten Abschnitt auf mehrere Einheitsvektoren ausgeweitet werden.

3.2 Invariante Einbettungen

Es stellt sich die Frage, wie wir die Einbettungen für einen Quotienten auf der Rotationsgruppe beschreiben. Deswegen soll es in diesem Abschnitt darum gehen, welche verschiedenen Möglichkeiten der Einbettung, ausgehend von der Idee mit Tensoren, wir für verschiedene Untergruppen K haben. Wir haben uns zunächst eine Abbildung $\mathcal{E}_u^r : SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^d$ konstruiert. Daraus wollen wir Abbildungen $\mathcal{E}_K : SO(3)/K \rightarrow \mathbb{R}^d$ ableiten.

Die Idee ist über die Elemente aus der Gruppe K zu addieren, also

$$\mathcal{E}_{K,u}(R) = \sum_{k \in K} \mathcal{E}_u(Rk) \quad (3.10)$$

zu betrachten, damit die Einbettung für R und Rk übereinstimmt, wenn $k \in K$ ist.

Haben wir mehrere $u_i \in \mathbb{S}^2$ mit $i \in \{1, \dots, n\}$, so können wir die Tensoren getrennt behandeln und als einzelne Komponenten der Einbettung auffassen:

$$\mathcal{E}_{K,u}^r(R) = \left(\sum_{k \in K} \otimes^{r_i}(Rku_i) \right)_{i=1, \dots, n}, \quad (3.11)$$

wobei $r \in \mathbb{N}^n$ und $u = (u_i)_{i=1}^n \in \otimes^n \mathbb{S}^2$ ist.

Auch hier erhalten wir mit der Abbildung vec einen Vektor, indem wir die Vektoren für die jeweiligen Tensoren in einen Vektor untereinander schreiben.

Satz 3.12. *Genau wie in Satz 3.7 gilt auch für die Einbettungen $\mathcal{E}_{K,u}^r$ die Darstellung*

$$\Phi : SO(3) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \quad \Phi(R) = \text{diag}(\otimes^{r_1} R, \dots, \otimes^{r_n} R)$$

und alle $S \in SO(3)/K$ die Homomorphieeigenschaft

$$\mathcal{E}(RS) = \Phi(R) \cdot \mathcal{E}(S).$$

Beweis. Für die Abbildung \mathcal{E}_u^r gilt der Satz mit $\Phi(R) = \otimes^r R$ nach Satz 3.7.

Für die Summe mehrerer Tensoren gilt analog

$$\begin{aligned} \text{vec } \mathcal{E}_{K,u}^r(RS) &= \sum_{k \in K} \text{vec } \otimes^r RS(ku) = \sum_{k \in K} \Phi(R) (\text{vec}(\otimes^r S(ku))) \\ &= \Phi(R) \left(\sum_{k \in K} \text{vec}(\otimes^r S(ku)) \right) = \Phi(R) \cdot \text{vec}(\mathcal{E}_{K,u}^r(S)), \end{aligned}$$

wobei $\Phi(R)$ wieder definiert ist durch $\Phi(R) = \otimes^r R$.

Haben wir mehrere Vektoren $u_i \in \mathbb{S}^2$ und die Abbildung aus (3.11), fügen wir die Matrizen $\otimes^{r_i} R$ als Blockdiagonalmatrizen zusammen, und erhalten das gewünschte Resultat

$$\Phi(R) = \text{diag}(\otimes^{r_1} R, \dots, \otimes^{r_n} R).$$

□

3.3 Translation

Bemerkung 3.13. *Es sei $\mathcal{E} : SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^{3^r}$ ein Homomorphismus und $b \in \mathbb{R}^{3^r}$. Dann ist $\mathcal{E}_b(R) = \mathcal{E}(R) + b$ genau dann ein Homomorphismus, wenn $R \triangleright b = b$ für alle $R \in SO(3)$.*

Das motiviert uns, einen solchen Term $b \in \mathbb{R}^{3^r}$ zu finden. Dazu definieren wir uns den Term M_r :

Definition 3.14. *Wie in Gleichung (3) in [1] definieren wir für gerades $r \in \mathbb{N}$ den Term*

$$(M_r)_{j_1, \dots, j_r} = \text{symm}(\otimes^{\frac{r}{2}} I_3) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma_r} \prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} \delta_{j_{\sigma(2i-1)}, j_{\sigma(2i)}}, \quad (3.12)$$

wobei Σ_r die Gruppe der Permutationen von $1, \dots, r$ und

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

ist.

So ist zum Beispiel

$$(M_4)_{j_1 j_2 j_3 j_4} = \frac{1}{3} (\delta_{j_1 j_2} \delta_{j_3 j_4} + \delta_{j_1 j_3} \delta_{j_2 j_4} + \delta_{j_1 j_4} \delta_{j_2 j_3}).$$

Wir werden später sehen, dass die Vektoren $\text{vec } M_r$ so speziell gewählt sind, dass eine Gleichverteilung in $SO(3)/K$ dann in der Einbettung den Erwartungswert Null haben wird. Wir zeigen, M_r erfüllt die Bedingung aus Bemerkung 3.13 mithilfe des folgenden Lemmas:

Lemma 3.15. *Es gilt*

$$(\otimes^r R) \cdot \text{vec } M_r = \text{vec } M_r \quad (3.13)$$

mit M_r aus Gleichung (3.12).

Beweis. Wir schauen uns die Einträge von $(\otimes^r R) \cdot \text{vec } M_r$ mithilfe von Gleichung (3.12) genauer an:

$$\begin{aligned} (\otimes^r R \cdot \text{vec } (M_r))_{i_1, \dots, i_r} &= \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^3 (M_r)_{j_1, \dots, j_r} \cdot r_{i_1 j_1} r_{i_2 j_2} \cdots r_{i_r j_r} \\ &\stackrel{(3.12)}{=} \frac{1}{r!} \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^3 \left(\left(\sum_{\sigma \in \Sigma_r} \prod_{k=1}^{\frac{r}{2}} \delta_{j_{\sigma(2k-1)}, j_{\sigma(2k)}} \right) r_{i_1 j_1} r_{i_2 j_2} \cdots r_{i_r j_r} \right) \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^3 \left(\sum_{\sigma \in \Sigma_r} \prod_{k=1}^{\frac{r}{2}} \delta_{j_{\sigma(2k-1)}, j_{\sigma(2k)}} \right) \prod_{l=1}^r r_{i_l j_l} \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma_r} \prod_{k=1}^{\frac{r}{2}} \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^3 \delta_{j_{\sigma(2k-1)}, j_{\sigma(2k)}} r_{i_{\sigma(2k-1)} j_{\sigma(2k-1)}} r_{i_{\sigma(2k)} j_{\sigma(2k)}} \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma_r} \prod_{k=1}^{\frac{r}{2}} \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^3 \underbrace{\delta_{j_{\sigma(2k-1)}, j_{\sigma(2k)}}}_{\text{nur gleich 1 falls } j_{\sigma(2k-1)} = j_{\sigma(2k)}} r_{i_{\sigma(2k-1)} j_{\sigma(2k-1)}} r_{i_{\sigma(2k)} j_{\sigma(2k)}} \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma_r} \prod_{k=1}^{\frac{r}{2}} \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^3 r_{i_{\sigma(2k-1)} j_{\sigma(2k-1)}} r_{i_{\sigma(2k)} j_{\sigma(2k-1)}} \end{aligned}$$

Die Summen und Produkte sind dabei alle endlich, deswegen dürfen wir sie vertauschen. Weiterhin gilt aufgrund der Orthogonalität von R für diese Summe

$$\begin{aligned} \sum_{j_{\sigma(2k-1)}=1}^3 \prod_{k=1}^{\frac{r}{2}} r_{i_{\sigma(2k-1)}j_{\sigma(2k-1)}} r_{i_{\sigma(2k)}j_{\sigma(2k)}} &= \langle r_{i_{\sigma(2k-1)}}, r_{i_{\sigma(2k)}} \rangle \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } i_{\sigma(2k-1)} \neq i_{\sigma(2k)} \\ 1 & \text{für } i_{\sigma(2k-1)} = i_{\sigma(2k)} \end{cases}. \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} (\otimes^r R \cdot \text{vec}(M_r))_{i_1, \dots, i_r} &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma_r} \prod_{k=1}^{\frac{r}{2}} \delta_{i_{\sigma(2k-1)}, i_{\sigma(2k)}} \\ &= (M_r)_{i_1, \dots, i_r}. \end{aligned}$$

□

Das heißt, M_r ist gerade so definiert, dass der Vektor $\text{vec } M_r$ unter der Rotation $\otimes^r R$ im \mathbb{R}^d gleich bleibt. Mithilfe dieses Lemmas erhalten wir auch eine Darstellung für die Einbettungen $\mathcal{E}_{K,u}^r : SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit einer Translation um M_r .

Satz 3.16. *Genau wie in Satz 3.7 gilt auch für die Einbettungen*

$$\mathcal{E}_{K,u}^r(R) = \left(\sum_{k \in K} \otimes^{r_i}(Rku_i) - M_{r_i} \right)_{i=1, \dots, n}$$

die Darstellung

$$\Phi : SO(3) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \quad \Phi(R) = \text{diag}(\otimes^{r_1} R, \dots, \otimes^{r_n} R)$$

und alle $S \in SO(3)/K$ die Homomorphieeigenschaft

$$\mathcal{E}(RS) = \Phi(R) \cdot \mathcal{E}(S).$$

Beweis. Wir beweisen diesen Satz für $n = 1$. Für größeres n kann man analog zum Beweis bei der Summation eine Blockdiagonalmatrix wählen.

Wir schauen uns das Produkt

$$\Phi(R) \cdot \text{vec}(M_r) = \otimes^r R \cdot \text{vec}(M_r)$$

an. Aus Lemma 3.15 folgt, dass gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{K,u}^r(RS) &= \otimes^r(RSu) - \text{vec } M_r = (\otimes^r R) \cdot (\text{vec } \otimes^r Su) - \text{vec } M_r \\ &= (\otimes^r R) \cdot (\text{vec } \otimes^r Su - \text{vec } M_r) = (\otimes^r R) \mathcal{E}_{K,u}^r(S). \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass eine Subtraktion des Termes M_r im Bild der Einbettung die zugeordnete Matrix $\Phi(R)$ nicht ändert. □

Bemerkung 3.17. *Das Lemma 3.10 gilt auch für die Einbettungen $\mathcal{E}_{K,u}^r$, die Matrix $\Phi(R)$ bleibt auch in diesen Fällen eine orthogonale Matrix, denn eine Blockdiagonalmatrix aus orthogonalen Matrizen bleibt eine orthogonale Matrix. Wie in Satz 3.11 bleibt der Radius $\|\mathcal{E}(R)\|^2 = \|\mathcal{E}(I_3)\|^2 =: \rho^2$ konstant.*

Bemerkung 3.18. *Wir haben gezeigt, dass die Vektoren $\text{vec } \mathcal{E}_{K,u}^r(R)$ auf einer Sphäre liegen. Da sich das $\Phi(R)$ aus Satz 3.7 nicht ändert, wenn wir den Term M_r in der Einbettung abziehen, kann man für die Einbettung $\mathcal{E}_{K,u}^r$ ohne den Term M_r denselben Beweis von Satz 3.11 durchführen, man erhält nur ein anderes ρ^2 , da auch $\mathcal{E}(I_3)$ dann ohne den Term M_r auskommt. Das bedeutet, dass die Subtraktion von M_r im Bild von \mathcal{E} dazu führt, dass alle Werte von einer Kugeloberfläche auf eine Kugeloberfläche mit anderem Radius verschoben werden. Nur aufgrund der besonderen Struktur von M_r ist das möglich. Daraus folgt auch, dass die Vektoren $\mathcal{E}(R)$ nicht dicht auf der Sphäre liegen können, sonst würden die verschobenen Vektoren für jeden Verschiebungsvektor wieder auf einer Sphäre mit demselben Radius liegen.*

Jetzt haben wir einige Eigenschaften der Einbettungen geklärt, die für alle Einbettungen $\mathcal{E}_{K,u}^r$ gelten. Im folgenden Abschnitt wollen wir nun die Einbettungen $\mathcal{E} : SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^d$ für spezielle Symmetriegruppen K definieren.

3.4 Einbettungen für spezielle Quotienten

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit den konkreten euklidischen Einbettungen von $SO(3)/K$ mit Punktgruppen erster Art K beschäftigen. Dazu betrachten wir die Einbettungen aus [1]. In diesem und im folgenden Abschnitt werden wir die Schreibweise wie in [1] wählen, die von der vorher betrachteten Schreibweise etwas abweicht.

Die betrachteten Gruppen sind aufgelistet in Tabelle 3.1, zusammen mit den Einheitsvektoren $(u_i) \in \mathbb{R}^3$, die wir nutzen, um Elemente aus K zu repräsentieren. Diese entstehen, indem man einen Vektor $u \in \mathbb{S}^2$ wählt und dazu entsprechend ku für $k \in K$ erhält. Dabei ist u_0 immer

Gruppe K	Anzahl der Elemente $ K $	Einheitsvektoren	Bem
C_1	1	(u_1, u_2, u_3)	u_1, u_2, u_3 orthonormal, $u_3 = u_1 \times u_2$
C_2	2	$(u_0, \pm u_1)$	u_0, u_1 orthonormal
C_r ($r \geq 3$)	r	(u_1, \dots, u_r)	u_1, \dots, u_r komplanar, $u_i^\top u_{i-1} = \cos\left(\frac{2\pi}{r}\right)$ für $i = 2, \dots, r$
D_2	4	$(\pm u_1, \pm u_2)$	u_1, u_2 orthonormal
D_r ($r \geq 3$)	$2r$	(u_1, \dots, u_r)	u_1, \dots, u_r komplanar, $u_i^\top u_{i-1} = \cos\left(\frac{2\pi}{r}\right)$ für $i = 2, \dots, r$
T	12	(u_1, u_2, u_3, u_4)	$u_i^\top u_{i-1} = -\frac{1}{3}$ für $i \neq j$
O	24	$(\pm u_1, \pm u_2, \pm u_3)$	u_1, u_2, u_3 orthonormal
Y	60	$(\pm u_1, \dots, \pm u_6)$	$ u_i^\top u_{i-1} = 5^{-\frac{1}{2}}$ für $i \neq j$

Tabelle 3.1: Symmetriegruppen und Einheitsvektoren

die Drehachse der Symmetriegruppe. Die Gruppe C_1 hat ein Element, die Identität I_3 . Deswegen nehmen wir als Einheitsvektoren eine orthonormale Basis des \mathbb{R}^3 . Die zyklische Gruppe $K = C_r$ mit $r \geq 3$ besteht aus den r Drehungen $A_{\frac{2\pi j}{r}}$ um u_0 um Vielfache von $\frac{2\pi}{r}$, dabei ist $C_r = \langle A_{\frac{2\pi}{r}} \rangle$. Als Einheitsvektoren nehmen wir Vektoren aus \mathbb{R}^3 , die orthonormal zu den Seiten eines regelmäßigen r -Ecks sind. Die Diedergruppe D_r mit $r \geq 3$ besteht aus Drehungen $A_{\frac{2\pi j}{r}}$ um eine n -zählige Achse u_0 und n Spiegelungen um zweizählige Achsen senkrecht dazu. Hier nehmen wir als Einheitsvektoren wieder Vektoren, die orthonormal sind zu den Seiten eines regelmäßigen r -Ecks. Die einfachste nichttriviale Gruppe ist C_2 . Sie besteht aus der Identität und einer Drehung A_π um π um u_0 , dabei ist A_π erzeugendes Element der Gruppe, also $C_2 = \langle A_\pi \rangle$. Für die Einheitsvektoren nehmen wir einen Einheitsvektor u_0 und eine Achse u_1 orthogonal dazu. Für die Diedergruppe $K = D_2$ nehmen wir als Einheitsvektoren ein Paar orthonormaler Achsen. Punktgruppen, die mindestens zwei Drehachsen mit einer Zähligkeit größer zwei besitzen, entsprechen

den Symmetriegruppen der platonischen Körper. T, O bzw. Y entsprechen der Symmetriegruppe eines Tetraeders, Oktaeders bzw. Ikosaeders. Wir nehmen als Einheitsvektoren auf Länge Eins normierte Normalen auf die Seiten eines Tetraeders, Oktaeders, bzw. Ikosaeders.

Wir wollen für jede dieser Untergruppen eine Einbettung \mathcal{E}_K wie in [1] definieren, die auf die Untergruppe K abgestimmt ist. Das heißt zwei Rotationen aus $SO(3)$, die durch eine Rotation aus K ineinander überführt werden können, sollen auch das gleiche Bild in der Einbettung in \mathbb{R}^d haben.

Definition 3.19. Die Abbildungen aus [1]

$$\mathcal{E}_K : SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^d$$

sind definiert in Tabelle 3.2, zusammen mit den Vektorräumen \mathbb{R}^d .

Gruppe K	\mathcal{E}_K	Vektorraum \mathbb{R}^d
C_1	$\mathcal{E}_{C_1}(R) = (Ru_1, Ru_2, Ru_3)$	$\mathbb{R}^{3 \times 3} \cong \mathbb{R}^9$
C_2	$\mathcal{E}_{C_2}(R) = (Ru_0, Ru_1(Ru_1)^\top - \frac{1}{3}I_3)$	$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \cong \mathbb{R}^{12}$
C_r ($r \geq 3$)		
r ungerade	$\mathcal{E}_{C_r}(R) = (Ru_0, \sum_{i=1}^r \otimes^r Ru_i)$	$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3^r} \cong \mathbb{R}^{3+3^r}$
r gerade	$\mathcal{E}_{C_r}(R) = (Ru_0, \sum_{i=1}^r \otimes^r Ru_i - \frac{r}{r+1}M_r)$	$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3^r} \cong \mathbb{R}^{3+3^r}$
D_2	$\mathcal{E}_{D_2}(R) = (Ru_1(Ru_1)^\top - \frac{1}{3}I_3, Ru_2(Ru_2)^\top - \frac{1}{3}I_3, Ru_3(Ru_3)^\top - \frac{1}{3}I_3)$	$\mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \cong \mathbb{R}^{27}$
D_r ($r \geq 3$)		
r ungerade	$\mathcal{E}_{D_r}(R) = \sum_{i=1}^r \otimes^r Ru_i$	\mathbb{R}^{3^r}
r gerade	$\mathcal{E}_{D_r}(R) = \sum_{i=1}^r \otimes^r Ru_i - \frac{r}{r+1}M_r$	\mathbb{R}^{3^r}
T	$\mathcal{E}_T(R) = \otimes^3 Ru_1 + \otimes^3 Ru_2 + \otimes^3 Ru_3 + \otimes^3 Ru_4$	$\mathbb{R}^{3^3} \cong \mathbb{R}^{27}$
O	$\mathcal{E}_O(R) = \otimes^4 Ru_1 + \otimes^4 Ru_2 + \otimes^4 Ru_3 - \frac{3}{5}M_4$	$\mathbb{R}^{3^4} \cong \mathbb{R}^{81}$
Y	$\mathcal{E}_Y(R) = \sum_{i=1}^6 \otimes^{10} Ru_i - \frac{6}{11}M_{10}$	$\mathbb{R}^{3^{10}} \cong \mathbb{R}^{59049}$

Dabei ist für C_r mit $r \geq 3$ $u_0 = \frac{1}{\sin(\frac{2\pi}{r})}u_1 \times u_2$ und für D_2 ist $u_3 = u_1 \times u_2$.

Tabelle 3.2: Definition der Einbettungen \mathcal{E}_K

Bei C_1 benutzen wir eine orthogonale Basis des \mathbb{R}^3 , da es keine Symmetrieachse gibt. Der Vektor u_3 ergibt sich zwar aus u_1 und u_2 , aber für Betrachtungen des Abstandes ist es nötig, dass wir alle drei Vektoren zur Einbettung heranziehen. (siehe dazu Kapitel 4)

Diese Einbettungen stimmen nicht genau mit unseren Überlegungen für $\mathcal{E}_{K,u}^r$ in Gleichung (3.11) überein. Wir werden zunächst die Eigenschaften dieser Einbettungen aus Tabelle 3.2 untersuchen und danach versuchen, die Einbettungen etwas zu verändern, indem wir zusätzliche Eigenschaften fordern.

Zunächst überprüfen wir, ob diese Einbettungen für die Quotienten $SO(3)/K$ wirklich wohldefiniert sind.

Satz 3.20. Die Einbettungen \mathcal{E} sind wohldefiniert, das heißt es gilt

$$\mathcal{E}(RA) = \mathcal{E}(R) \quad \forall R \in SO(3)/K, \forall A \in K. \quad (3.14)$$

Beweis. Es reicht, wenn wir die Aussage für alle erzeugenden Elemente $A \in K$ zeigen. Für C_1 gilt die Aussage offensichtlich.

In der Symmetriegruppe C_2 ist einziges erzeugendes Element die Drehung A_π um u_0 um π . Dafür gilt

$$\mathcal{E}(RA_\pi) = (RA_\pi u_0, (RA_\pi u_1)(RA_\pi u_1)^\top - \frac{1}{3}I_3) = (Ru_0, R(-u_1)(R(-u_1))^\top - \frac{1}{3}I_3) = \mathcal{E}(R).$$

In den Symmetriegruppen C_r ($r > 2$) ist das einzige erzeugende Element die Drehung $A_{\frac{2\pi}{r}}$ um u_0 um $\frac{2\pi}{r}$. Dafür gilt

$$\mathcal{E}(RA_{\frac{2\pi}{r}}) = (RA_{\frac{2\pi}{r}}u_0, \sum_{i=1}^r \otimes RA_{\frac{2\pi}{r}}u_i - M_r) = (Ru_0, \sum_{i=1}^{r-1} \otimes Ru_{i+1} + \otimes Ru_1 - M_r) = \mathcal{E}(R).$$

In der Symmetriegruppe D_2 gibt es die beiden erzeugenden Elemente die Drehung A_π um u_1 um π und die Drehung B_π um u_2 um π . Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(RA_\pi) &= (RA_\pi u_1 (RA_\pi u_1)^\top - \frac{1}{3}I_3, RA_\pi u_2 (RA_\pi u_2)^\top - \frac{1}{3}I_3, \\ &\quad (RA_\pi u_1 \times RA_\pi u_2) (RA_\pi u_1 \times RA_\pi u_2)^\top - \frac{1}{3}I_3) \\ &= (Ru_1 (Ru_1)^\top - \frac{1}{3}I_3, (-Ru_2) (-Ru_2)^\top - \frac{1}{3}I_3, (Ru_1 \times (-Ru_2)) (Ru_1 \times (-Ru_2))^\top - \frac{1}{3}I_3) \\ &= \mathcal{E}(R). \end{aligned}$$

Analog gilt auch $\mathcal{E}(RB_\pi) = \mathcal{E}(R)$.

Für $K = D_r$ $r > 2$ lässt sich (3.14) für $A = A_{\frac{2\pi}{r}}$ wie bei C_r beweisen, nur dass die erste Komponente weggelassen wird. Die zusätzlich auftretenden Spiegelungen lassen die u_i fest, weswegen (3.14) für alle $A \in K$ gilt.

Die Symmetriegruppe T enthält alle Drehungen, die ein regelmäßiges Tetraeder auf sich selbst abbilden. Aufgrund der Wahl der u_i entspricht das den bijektiven Abbildungen von u_1, u_2, u_3, u_4 in sich selbst. Da die Einbettung paarweise symmetrisch in den u_i ist, gilt (3.14).

Die Symmetriegruppe O entspricht der Symmetrie eines Oktaeders, welcher drei vierzählige Drehachsen durch gegenüberliegende Ecken hat. Die u_i liegen auf diesen Achsen. Eine Drehung aus O entspricht dann einer Permutation der Achsen. Da bei der vierten Potenz das Vorzeichen der u_i nichts ändert, gilt (3.14).

Die Symmetriegruppe Y entspricht der Symmetrie eines Ikosaeders, welcher sechs fünfzählige Drehachsen durch gegenüberliegende Ecken besitzt. Die u_i liegen auf diesen Achsen. Eine Drehung aus Y entspricht dann einer Permutation der Achsen. Da bei der zehnten Potenz das Vorzeichen der u_i nichts ändert, gilt (3.14). □

Es stellt sich die Frage, wie das r , also die Potenz in den Tensorprodukten zu wählen ist, damit die Einbettungen auch injektiv sind.

Bei diesen Einbettungen \mathcal{E}_K ist r immer gerade die Zähligkeit der Drehachse, denn wenn r kleiner gewählt wäre als die Zähligkeit der Achse, wäre \mathcal{E}_K nicht injektiv. Hätten wir zum Beispiel für die Symmetriegruppe C_2 die Einbettung $\mathcal{E}_{C_2}(R) = (Ru_0, Ru_1 + R(-u_1))$, so würde jede Rotation auf $(u_0, 0)$ abgebildet werden. Da $u_1 u_1^\top = (-u_1)(-u_1)^\top$, wählen wir die Einbettung $\mathcal{E}_{C_2}(R) = u_1 u_1^\top - \frac{1}{3}I_3$. Wozu der Term $\frac{1}{3}I_3$ abgezogen werden muss, werden wir in Satz 3.24 sehen.

Nur wenn r gerade die Zähligkeit der Achse ist, ist \mathcal{E}_K injektiv.

Satz 3.21. *Die Abbildungen*

$$\mathcal{E}_K : SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^d,$$

aus Tabelle 3.2 sind injektiv. (siehe Anhang von [1])

Beweis. Für $K = C_1, C_2, D_2$ folgt Injektivität direkt aus der Konstruktion der Einbettung \mathcal{E}_K . Seien $R_1, R_2 \in SO(3)/D_r$ zwei Rotationen mit $r \geq 3$. Dann bezeichnen wir die Multiplikationen von R_1 bzw. R_2 mit den Einheitsvektoren u_1, \dots, u_r mit $(R_1 u_1, \dots, R_1 u_r) = (v_1, \dots, v_r)$ bzw. $(R_2 u_1, \dots, R_2 u_r) = (w_1, \dots, w_r)$. Wir setzen $V = \text{span}\{v_1, \dots, v_r\}$ und $W = \text{span}\{w_1, \dots, w_r\}$. Sei e_1, e_2, e_3 eine orthonormale Basis des \mathbb{R}^3 mit $e_1 \in V \cap W$ und $e_2 \in V$. Die Vektoren (v_1, \dots, v_r)

und (w_1, \dots, w_r) kann man sich jeweils vorstellen als im \mathbb{R}^3 gedrehte r -te Einheitswurzeln da die r Vektoren jeweils in einer Ebene liegen und zwischen ihnen immer den Winkel $\frac{2\pi}{r}$ ist. Wir finden also, möglicherweise nach Umkehren der Reihenfolge von v_1, \dots, v_r ein θ_0 , sodass für $j \in \{1, \dots, r\}$ gilt

$$v_j = \cos(\theta_j)e_1 + \sin(\theta_j)e_2,$$

wobei $\theta_j = \theta_0 + \frac{j2\pi}{r}$ für $j \in \{1, \dots, r\}$ ist. Sei $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ der Winkel zwischen V und W . Wir wollen noch die Vektoren w_j in der Basis e_1, e_2, e_3 ausrechnen. Da $e_1 \in V \cap W$ ist, müssen wir die Vektoren v_j um die Achse e_1 um α drehen, also

$$\begin{aligned} R(e_1, \alpha)v_j &= R(e_1, \alpha)(\cos(\theta_j)e_1 + \sin(\theta_j)e_2) \\ &= e_1(e_1 \cdot v_j) + \cos \alpha(e_1 \times v_j) \times v_j + \sin \alpha(e_1 \times v_j) \\ &= e_1(\cos \theta_j) + \cos \alpha \sin \theta_j(e_3 \times e_1) + \sin \alpha \sin(\theta_j)e_3 \\ &= \cos(\theta_j)e_1 + \cos(\alpha) \sin(\theta_j)e_2 + \sin(\alpha) \sin(\theta_j)e_3. \end{aligned}$$

Die Vektoren w_j können nun noch in der Ebene W gedreht sein, also finden wir ein δ , sodass möglicherweise nach Umkehren der Reihenfolge, gilt

$$w_j = \cos(\theta_j + \delta)e_1 + \cos(\alpha) \sin(\theta_j + \delta)e_2 + \sin(\alpha) \sin(\theta_j + \delta)e_3.$$

Wenn $\mathcal{E}_{D_r}(R_1) = \mathcal{E}_{D_r}(R_2)$, müssen die Einbettungen in allen Komponenten übereinstimmen. Stellen wir $\mathcal{E}_{D_r}(R_1)$ und $\mathcal{E}_{D_r}(R_2)$ mithilfe der Basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ dar, muss gelten

$$\cos(\theta_j)^a (\cos(\alpha) \sin(\theta_j))^{r-a} = \cos(\theta_j + \delta)^a (\cos(\alpha) \sin(\theta_j + \delta))^{r-a} \quad (3.15)$$

für $a \in \{0, \dots, r\}$. Daraus folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} r &= \left| r e^{i\theta_0 r} \right| = \left| \sum_{j=1}^r (e^{i\theta_j})^r \right| = \left| \sum_{j=1}^r (\cos \theta_j + i \sin \theta_j)^r \right| \stackrel{(3.15)}{=} \left| \sum_{j=1}^r (\cos(\theta_j + \delta) + i \cos(\alpha) \sin(\theta_j + \delta))^r \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^r (|\cos(\theta_j + \delta) + i \cos(\alpha) \sin(\theta_j + \delta)|)^r = \sum_{j=1}^r (\cos^2(\theta_j + \delta) + \cos^2(\alpha) \sin^2(\theta_j + \delta))^{\frac{r}{2}} \\ &\leq \sum_{j=1}^r (\cos^2(\theta_j + \delta) + \sin^2(\theta_j + \delta))^{\frac{r}{2}} = \sum_{j=1}^r 1^{\frac{r}{2}} = r. \end{aligned}$$

Es muss also in dieser Ungleichungskette überall Gleichheit stehen, insbesondere muss $\cos \alpha = 1$, also $\alpha = 0$ gelten. Damit folgt

$$r e^{ir\theta_0} = \sum_{j=1}^r (\cos(\theta_j + \delta) + i \sin(\theta_j + \delta))^r = \sum_{j=1}^r (e^{i\theta_j + \delta})^r = \sum_{j=1}^r (e^{ir(\theta_0 + \delta)})^r = r e^{ir(\theta_0 + \delta)}.$$

Also gilt $r\theta_0 = r(\theta_0 + \delta) + 2\pi k$ und $\delta = \frac{2\pi k}{r}$ mit $k \in \mathbb{Z}$, woraus folgt, dass $(v_1, \dots, v_r) = (w_1, \dots, w_r)$ und $R_1 = R_2$ in $SO(3)/D_r$.

Injektivität für $K = C_r$ folgt aus der Injektivität von $K = D_r$. Für die anderen Symmetriegruppen kann man die Injektivität mithilfe von Computeralgebra um die trigonometrischen Summen, die entstehen zu verarbeiten, nachweisen. Wir werden aber in Kapitel 4 sehen, dass sich die Injektivität aller Abbildungen auch anderweitig ergibt. \square

Es stellt sich die Frage, warum wir gerade M_r in der Einbettung abziehen. Im diskreten Fall tritt bei einer Gleichverteilung jedes mögliche Ergebnis mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf, im stetigen Fall ist die Dichte konstant. Vor diesem Hintergrund definieren wir als Gleichverteilung auf $SO(3)/K$ die eindeutige Verteilung, die invariant ist unter der Anwendung von $SO(3)$ auf $SO(3)/K$, bei der $S \in SO(3)$ R auf SR abbildet. Das führt zur Definition des Haar-Maß:

Definition 3.22. Ein (linkes) Haarsches Maß einer Gruppe G ist ein linksinvariantes reguläres Borelmaß, das auf nichtleeren offenen Teilmengen positiv ist. Ein Maß μ heißt dabei linksinvariant, wenn für jede Borelmenge A und jedes Gruppenelement $g \in G$ gilt

$$\mu(gA) = \mu(A).$$

Den Term M_r nutzen wir, um das Bild $\mathcal{E}_{K,u}^r$ gerade so zu verschieben, dass der Erwartungswert Null ist. Um das zu zeigen, benötigen wir noch ein Lemma.

Lemma 3.23. Es gilt für alle $v \in \mathbb{S}^2$

$$\langle M_r, \otimes^r v \rangle = 1 \quad (3.16)$$

mit $r \in 2\mathbb{N}$ und M_r wie in Gleichung 3.12, siehe auch (A2) in [1].

Beweis. Die Formel (3.12) von M_r können wir umschreiben zu

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma_r} \delta_{j_{\sigma(1)}, j_{\sigma(2)}} \cdot \delta_{j_{\sigma(3)}, j_{\sigma(4)}} \cdots \delta_{j_{\sigma(r-1)}, j_{\sigma(r)}} \\ &= \frac{1}{r!} 2^{\frac{r}{2}} \binom{r}{2}! \underbrace{(\delta_{j_1, j_2} \cdot \delta_{j_3, j_4} \cdots \delta_{j_{r-1}, j_r} + \cdots)}_{(r-1)(r-3)\cdots 1 \text{ Summanden}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Da das Produkt der δ nur gleich 1 sein kann, wenn paarweise je zwei j_i gleich sind, gilt

$$\langle M_r, \otimes^r v \rangle = \sum_{\substack{i, k, j \\ 2i+2j+2k=r}} a(i, j, k) v_1^{2i} v_2^{2j} v_3^{2k}$$

mit Koeffizienten $a(i, j, k)$. Diese Koeffizienten wollen wir bestimmen:

$$\begin{aligned} a(i, j, k) &= \underbrace{\frac{1}{r!} 2^{\frac{r}{2}} \binom{r}{2}!}_{\text{Faktor in (3.17)}} \cdot \underbrace{\binom{r}{2i} \binom{r-2i}{2j} \binom{r-2i-2j}{2k}}_{\text{Anzahl Tensoreinträge}} \\ &\quad \cdot \underbrace{(2i-1)(2i-3)\cdots 1 \cdot (2j-1)(2j-3)\cdots 1 \cdot (2k-1)(2k-3)\cdots 1}_{\text{Anzahl Summanden ungleich 0 in (3.17)}} \\ &= \frac{1}{r!} 2^{\frac{r}{2}} \binom{r}{2}! \frac{r!}{(2i)!(2j)!(2k)!} \cdot (2i-1)(2i-3)\cdots 1 \cdot (2j-1)(2j-3)\cdots 1 \cdot (2k-1)(2k-3)\cdots 1 \\ &= \binom{r}{2}! \cdot \frac{2^i (2i-1)(2i-3)\cdots 1}{(2i)!} \cdot \frac{2^j (2j-1)(2j-3)\cdots 1}{(2j)!} \cdot \frac{2^k (2k-1)(2k-3)\cdots 1}{(2k)!} \\ &= \binom{r}{2}! \cdot \frac{1}{i!j!k!} = \binom{\frac{r}{2}}{i, j, k}. \end{aligned}$$

Zusammen mit dem Multinomialsatz folgt daraus, dass

$$\langle M_r, \otimes^r v \rangle = (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)^r = 1.$$

□

Satz 3.24. Sei μ das Haar-Maß auf $SO(3)$ und $\mathcal{E}_K \mu$ das Bildmaß in der Einbettung. Dann gilt

$$\mathbb{E} \mathcal{E}_K \mu = 0,$$

siehe Anhang von [1].

Beweis. Betrachten wir das Skalarprodukt aus Gleichung (3.7) von $\otimes^r u$ und $\otimes^r v$, erhalten wir

$$\langle \otimes^r u, \otimes^r v \rangle = \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i+j+k=r}}^r u_1^i u_2^j u_3^k v_1^i v_2^j v_3^k = (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^r = (u^\top v)^r. \quad (3.18)$$

Wenn $u = (u_1, u_2, u_3)^\top$ gleichverteilt auf der Sphäre \mathbb{S}^2 und $v = (v_1, v_2, v_3)^\top \in \mathbb{S}^2$ ein fester Einheitsvektor sind, dann ist

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{E} \otimes^r u, \otimes^r v \rangle &= \mathbb{E} \langle \otimes^r u, \otimes^r v \rangle = \mathbb{E} (u^\top v)^r \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} (u^\top v)^r d\mu(u) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\cos \theta)^r \sin \theta d\mu(\theta) d\mu(\varphi) \\ &= \int_0^\pi (\cos \theta)^r \sin \theta d\mu(\theta) = \int_{-1}^1 x^r d\mu(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^r dx \\ &= \begin{cases} \frac{1}{r+1} & \text{für } r \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } r \text{ gerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Falls r ungerade ist, folgt daraus, dass $\mathbb{E} \mathcal{E}_K = \mathbb{E}(\otimes^r u) = 0$.

Für gerades r kommt der Term M_r ins Spiel, denn hier ist das r -te Moment der Gleichverteilung auf $[-1, 1]$ nicht 0, sondern $\frac{1}{r+1}$. Mit dem Lemma 3.23 erhalten wir schließlich für gerades r

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{E} \mathcal{E}_K, \otimes^r v \rangle &= \langle \mathbb{E}(\otimes^r u - \frac{1}{r+1} M_r), \otimes^r v \rangle = \mathbb{E} \langle \otimes^r u - \frac{1}{r+1} M_r, \otimes^r v \rangle \\ &= \mathbb{E} \left((u^\top v)^r \right) - \frac{1}{r+1} = 0. \end{aligned}$$

Somit ist auch in diesem Fall $\mathbb{E}(\mathcal{E}_K) = 0$. □

Damit haben wir gezeigt, dass die Einbettungen aus [1] wohldefiniert und injektiv sind, sowie dass der Erwartungswert der Gleichverteilung immer Null ist.

3.5 Berechnung der Radien ρ_K und der Dimensionen ν_K

In Satz 3.11 haben wir bereits gezeigt, dass die Bilder der Einbettungen auf einer Kugeloberfläche mit Radius ρ_K liegen. Ziel dieses Abschnitts soll es sein, diese Werte ρ_K für die Einbettungen aus [1] zu berechnen und danach auch die Dimension des Bildes der Einbettungen in \mathbb{R}^d .

Die Werte von $\rho_K^2 = \|\mathcal{E}(I_3)\|^2$ sind für die endlichen Untergruppen K in Tabelle 3.3 angegeben, siehe dazu Tabelle 4 in [1]. Damit wir diese Werte ρ_K^2 berechnen können, benötigen wir noch zwei Lemmata. Diese sind zwar eher technisch, aber insbesondere die kombinatorische Formel 3.20 ist ein schönes Nebenprodukt des Beweises. Wir benötigen außerdem noch die Definition eines allgemeinen Binomialkoeffizienten.

Definition 3.25. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!} & \text{für } k > 0 \\ 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k < 0 \end{cases}. \quad (3.19)$$

Lemma 3.26. Es gilt

$$(r+1) \binom{r}{\frac{r}{2}} = \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3=0 \\ i_1+i_2+i_3=\frac{r}{2}}}^{\frac{r}{2}} \binom{2i_1}{i_1} \binom{2i_2}{i_2} \binom{2i_3}{i_3}. \quad (3.20)$$

Beweis. Man überzeugt sich durch Einsetzen, dass für natürliche Zahlen gilt

$$\binom{2n}{n} = (-1)^n \cdot 4^n \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{n}. \quad (3.21)$$

Mit dieser Gleichung und der Chu-Vandermonde-Identität wollen wir 3.20 beweisen:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3=0 \\ i_1+i_2+i_3=\frac{r}{2}}}^{\frac{r}{2}} \binom{2i_1}{i_1} \binom{2i_2}{i_2} \binom{2i_3}{i_3} &\stackrel{3.21}{=} \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3=0 \\ i_1+i_2+i_3=\frac{r}{2}}}^{\frac{r}{2}} (-1)^{i_1+i_2+i_3} \cdot 4^{i_1+i_2+i_3} \binom{-\frac{1}{2}}{i_1} \binom{-\frac{1}{2}}{i_2} \binom{-\frac{1}{2}}{i_3} \\ &= (-1)^{\frac{r}{2}} \cdot 4^{\frac{r}{2}} \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3=0 \\ i_1+i_2+i_3=\frac{r}{2}}}^{\frac{r}{2}} \binom{-\frac{1}{2}}{i_1} \binom{-\frac{1}{2}}{i_2} \binom{-\frac{1}{2}}{i_3} \\ &= (-1)^{\frac{r}{2}} \cdot 4^{\frac{r}{2}} \binom{-\frac{3}{2}}{\frac{r}{2}} \\ &= (-1)^{\frac{r}{2}} \cdot 4^{\frac{r}{2}} \left(\frac{-\frac{3}{2}(-\frac{3}{2}-1) \cdots (-\frac{3}{2}-(\frac{r}{2}-1))}{(\frac{r}{2})!} \right) \\ &= 4^{\frac{r}{2}} \left(\frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1) \cdots (\frac{3}{2}+(\frac{r}{2}-1))}{(\frac{r}{2})!} \right) \\ &= 2^{\frac{r}{2}} \left(\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (r+1)}{(\frac{r}{2})!} \right) \\ &= (r+1) \frac{2^{\frac{r}{2}} (\frac{r}{2})! \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (r+1)}{(\frac{r}{2})!^2} \\ &= (r+1) \binom{r}{\frac{r}{2}}. \end{aligned}$$

□

Lemma 3.27. *Es gilt für M_r aus (3.12)*

$$\langle M_r, M_r \rangle = r + 1.$$

Beweis. Da das euklidische Skalarprodukt $\langle M_r, M_r \rangle$ eines gleich $\|M_r\|^2$ ist, müssen wir jeden Eintrag von M_r quadrieren und dann alles aufsummieren. Wir wählen zunächst $i_1, i_2, i_3 \in \{0, 1, 2, \dots, \frac{r}{2}\}$ mit $i_1 + i_2 + i_3 = \frac{r}{2}$ so, dass

$$\begin{aligned} j_1, \dots, j_{2i_1} &= 1, \\ j_{2i_1+1}, \dots, j_{2i_1+2i_2} &= 2, \\ j_{2i_1+2i_2+1}, \dots, j_{2i_1+2i_2+2i_3} &= 3. \end{aligned}$$

Wir müssen später über alle diese i_1, i_2, i_3 summieren. Der jeweilige Eintrag in M_r hat dann die Größe

$$\frac{1}{r!} \binom{\frac{r}{2}}{i_1, i_2, i_3} (2i_1)! (2i_2)! (2i_3)! = \frac{(\frac{r}{2})! (2i_1)! (2i_2)! (2i_3)!}{r! i_1! i_2! i_3!}.$$

Da die Werte in M_r gleich sind, egal welche j_i gleich 1 sind (solange es $2i_1$ sind) und genauso

für i_2 und i_3 , gibt es $\binom{r}{2i_1, 2i_2, 2i_3}$ solche Einträge in M_r . Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned}
 \|M_r\|^2 &= \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3=0 \\ i_1+i_2+i_3=\frac{r}{2}}}^{\frac{r}{2}} \binom{r}{2i_1, 2i_2, 2i_3} \left(\frac{\left(\frac{r}{2}\right)! (2i_1)! (2i_2)! (2i_3)!}{r! i_1! i_2! i_3!} \right)^2 \\
 &= \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3=0 \\ i_1+i_2+i_3=\frac{r}{2}}}^{\frac{r}{2}} \frac{r!}{(2i_1)! (2i_2)! (2i_3)!} \left(\frac{\left(\frac{r}{2}\right)!^2 (2i_1)!^2 (2i_2)!^2 (2i_3)!^2}{r!^2 i_1!^2 i_2!^2 i_3!^2} \right) \\
 &= \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3=0 \\ i_1+i_2+i_3=\frac{r}{2}}}^{\frac{r}{2}} \left(\frac{\left(\frac{r}{2}\right)!^2 (2i_1)! (2i_2)! (2i_3)!}{r! i_1!^2 i_2!^2 i_3!^2} \right) \\
 &= \frac{1}{\binom{r}{\frac{r}{2}}} \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3=0 \\ i_1+i_2+i_3=\frac{r}{2}}}^{\frac{r}{2}} \binom{2i_1}{i_1} \binom{2i_2}{i_2} \binom{2i_3}{i_3}.
 \end{aligned}$$

Die Aussage des Lemmas ist also äquivalent zur Aussage vom vorhergehenden Lemma. \square

Mithilfe der Lemmata 3.27 und 3.23 können wir die Werte ρ_K^2 berechnen.

Satz 3.28. *Die Werte für $\rho_K^2 = \|\mathcal{E}(I_3)\|^2 = \langle \mathcal{E}(I_3), \mathcal{E}(I_3) \rangle$ sind die in Tabelle 3.3 gegebenen Werte.*

Beweis. Mithilfe von Lemma 3.27 sowie den Formeln (3.18) und (3.16) können wir für die einzelnen Symmetriegruppen folgendes berechnen:

Für $K = C_1$ gilt

$$\rho_{C_1}^2 = \langle \mathcal{E}_{C_1}(I_3), \mathcal{E}_{C_1}(I_3) \rangle = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \|u_3\|^2 = 3.$$

Für $K = C_2$ gilt

$$\rho_{C_2}^2 = \langle \mathcal{E}_{C_2}(I_3), \mathcal{E}_{C_2}(I_3) \rangle = \|u_0\|^2 + \langle \otimes^2 u_1 - \frac{1}{3} M_2, \otimes^2 u_1 - \frac{1}{3} M_2 \rangle = 1 + (u_1^\top u_1)^2 - \frac{3}{9} = \frac{2}{3} + \|u_1\|^4 = \frac{5}{3}.$$

Für $K = C_r$ ($r > 2$) müssen wir unterscheiden, ob r gerade oder ungerade ist. Zuerst der ungerade Fall. Da für $i, j \in \{1, \dots, r\}$ gilt

$$u_i^\top u_j = \cos\left(\frac{2\pi(i-j)}{r}\right), \quad (3.22)$$

folgt

$$\begin{aligned}
 \rho_{C_r}^2 &= \langle \mathcal{E}_{C_r}(I_3), \mathcal{E}_{C_r}(I_3) \rangle = \langle (u_0, \sum_{i=0}^r \otimes^r u_i), (u_0, \sum_{i=0}^r \otimes^r u_i) \rangle \\
 &= \|u_0\|^2 + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r ((u_i)^\top u_j)^r \\
 &\stackrel{(3.22)}{=} 1 + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \cos\left(\frac{2\pi(i-j)}{r}\right)^r = 1 + r \sum_{j=0}^{r-1} \cos\left(\frac{2\pi j}{r}\right)^r \\
 &= 1 + r \sum_{j=0}^{r-1} \left(\frac{1}{2} (e^{\frac{i2\pi j}{r}} + e^{\frac{-i2\pi j}{r}})\right)^r = 1 + \frac{r}{2^r} \sum_{j=0}^{r-1} (e^{\frac{i2\pi j}{r}} + e^{\frac{-i2\pi j}{r}})^r
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \frac{r}{2^r} \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} e^{\frac{i2\pi jk}{r}} e^{\frac{-i2\pi j(r-k)}{r}} = 1 + \frac{r}{2^r} \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \left(e^{\frac{i2\pi jk}{r}} \right)^2 \\
 &= 1 + \frac{r}{2^r} \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \sum_{j=0}^{r-1} e^{\frac{i4\pi jk}{r}} = 1 + \frac{r}{2^r} \left(r + r + \sum_{k=1}^{r-1} \binom{r}{k} \sum_{j=0}^{r-1} \left(e^{\frac{i4\pi jk}{r}} \right)^j \right) \\
 &= 1 + \frac{r}{2^r} \left(2r + \sum_{k=1}^{r-1} \binom{r}{k} \frac{\left(e^{\frac{i4\pi k}{r}} \right)^r - 1}{e^{\frac{i4\pi k}{r}} - 1} \right) = 1 + 2^{1-r} r^2.
 \end{aligned}$$

Für gerades r können wir die gleiche Rechnung machen, es muss nur zusätzlich der Summand für $k = \frac{r}{2}$ aus der Summe rausgezogen werden, und der Term $\frac{r^2}{r+1}$ muss im Skalarprodukt abgezogen werden:

$$\begin{aligned}
 \rho_{C_r}^2 &= 1 + \frac{r}{2^r} \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \sum_{j=0}^{r-1} e^{\frac{i4\pi jk}{r}} - 2 \sum_{i=1}^r \langle \otimes^r u_i, \frac{r}{r+1} M_r \rangle + \frac{r^2}{(r+1)^2} \langle M_r, M_r \rangle \\
 &= 1 + \frac{r}{2^r} \left(r + r + r \binom{r}{\frac{r}{2}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \frac{r}{2}}}^{r-1} \binom{r}{k} \sum_{j=0}^{r-1} \left(e^{\frac{i4\pi jk}{r}} \right)^j \right) - \frac{r^2}{r+1} \\
 &= 1 + \frac{r}{2^r} \left(2r + r \binom{r}{\frac{r}{2}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \frac{r}{2}}}^{r-1} \binom{r}{k} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\left(e^{\frac{i4\pi jk}{r}} \right)^r - 1}{e^{\frac{i4\pi jk}{r}} - 1} \right) - \frac{r^2}{r+1} \\
 &= 1 + 2^{1-r} r^2 + \frac{r^2}{2^r} \binom{r}{\frac{r}{2}} - \frac{r^2}{r+1}.
 \end{aligned}$$

Für $K = D_2$ gilt analog zu $K = C_2$

$$\rho_{D_2}^2 = 3 \cdot \langle u_1^\top u_1 - \frac{1}{3} M_r, u_1^\top u_1 - \frac{1}{3} M_r \rangle = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2.$$

Für $K = D_r$ ($r > 2$) kann $\rho_{D_r}^2$ genauso berechnet werden wie $\rho_{C_r}^2$, nur dass die erste Komponente weggelassen wird, also gilt

$$\rho_{D_r}^2 = \rho_{C_r}^2 - 1.$$

Für $K = T$ haben wir die Gleichungen

$$u_i^\top u_j = -\frac{1}{3} \quad (3.23)$$

für alle $i, j \in 1, 2, 3, 4$ und $i \neq j$. Deswegen gilt

$$\rho_T^2 = \langle \mathcal{E}_T(I_3), \mathcal{E}_T(I_3) \rangle = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 (u_i^\top u_j)^3 \stackrel{(3.23)}{=} \sum_{i=1}^4 \|u_i\|^6 + 12 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right)^3 = 4 - \frac{4}{9} = \frac{32}{9}.$$

Für die Symmetriegruppe $K = O$ sind die u_i orthogonal, also gilt

$$\rho_O^2 = \langle \mathcal{E}_O(I_3), \mathcal{E}_O(I_3) \rangle = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (u_i^\top u_j)^4 - \frac{9}{5} = \sum_{i=1}^3 \|u_i\|^8 - \frac{9}{5} = \frac{6}{5}.$$

Für $K = Y$ haben wir die Gleichungen

$$|u_i^\top u_j| = 5^{-\frac{1}{2}} \quad (3.24)$$

für alle $i \neq j$, also gilt

$$\rho_Y^2 = \langle \mathcal{E}_Y(I_3), \mathcal{E}_Y(I_3) \rangle = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 (u_i^\top u_j)^{10} - \frac{36}{11} \stackrel{(3.24)}{=} \sum_{i=1}^6 \|u_i\|^{20} + 30 \cdot 5^{-\frac{1}{2} \cdot 10} - \frac{36}{11} = \frac{18816}{6875}.$$

□

Gruppe K	ρ_K^2	ν_K
C_1	3	9
C_2	$\frac{5}{3}$	8
C_r ($r \geq 3$)		
r ungerade	$1 + 2^{1-r} r^2$	$\frac{(r+2)(r+1)}{2} + 3$
r gerade	$1 + 2^{-r} r^2 \left(2 + \binom{r}{\frac{r}{2}}\right) - \frac{r^2}{r+1}$	$\frac{(r+2)(r+1)}{2} + 3$
D_2	2	10
D_r ($r \geq 3$)		
r ungerade	$2^{1-r} r^2$	$\frac{(r+2)(r+1)}{2}$
r gerade	$2^{-r} r^2 \left(2 + \binom{r}{\frac{r}{2}}\right) - \frac{r^2}{r+1}$	$\frac{(r+2)(r+1)}{2}$
T	$\frac{32}{9}$	10
O	$\frac{6}{5}$	15
Y	$\frac{18816}{6875}$	66

Tabelle 3.3: Werte von ρ_K^2 und Dimension ν_K

Das Bild der Einbettungen \mathcal{E}_K ist also keinesfalls dicht im \mathbb{R}^d . Wir wollen uns noch etwas genauer mit diesem Bild auseinandersetzen. Die Vektorräume \mathbb{R}^d sind für alle Symmetriegruppen K hochdimensional. Deswegen werden die Einbettungen nicht alle Dimensionen ausschöpfen. Wir wollen untersuchen, in welche Unterräume die Einbettungen \mathcal{E}_K abbilden. Dazu müssen wir uns genauer mit den Strukturen der Tensorprodukte $\otimes^r x$ auseinandersetzen. Verallgemeinert werden die Tensorprodukte durch k -fach Arrays von reellen Zahlen $A = (a_{j_1 \dots j_k})_{j_1 \dots j_k=1}^{n_1 \dots n_k}$, wobei $a_{j_1 \dots j_k} \in \mathbb{R}$ der $(j_1 \dots j_k)$ -te Eintrag des Arrays ist. Das wird gelegentlich auch als k -dimensionale Hypermatrix bezeichnet. Den Raum solcher Arrays nennen wir $\mathbb{R}^{n_1 \times \dots \times n_k}$, welcher offensichtlich ein Vektorraum über \mathbb{R} mit Dimension $n_1 \cdots n_k$ bzgl. punktweise Addition und skalarer Multiplikation ist. Der Unterschied zwischen einem Array und einem Tensor besteht darin, dass in einem Array beliebige Zahlen stehen können, während Tensoren nur eine Teilmenge der Arrays bilden, da sie durch multiplizieren von Vektoren aus Vektorräumen, hier \mathbb{R}^n , entstehen.

Wir nennen ein n -faches Array kubisch, wenn alle k Dimensionen gleich sind, also wenn $n_1 = \dots = n_k = n$. Ein kubisches Array soll symmetrisch heißen, wenn sich seine Einträge nicht ändern unter Permutation der k Indizes. Formal, wenn Σ_k wieder die symmetrische Gruppe von Permutationen auf $\{1, \dots, k\}$ bezeichnet, haben wir die folgende Definition.

Definition 3.29. Ein k -faches Array $(a_{j_1 \dots j_k}) \in \mathbb{R}^{n \times \dots \times n}$ heißt *symmetrisch*, wenn

$$a_{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(k)}} = a_{j_1 \dots j_k}, \quad i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$$

für alle Permutationen $\sigma \in \Sigma_k$ gilt.

Zum Beispiel, ein 3-fach Array $(a_{ijk}) \in \mathbb{R}^{n \times n \times n}$ ist symmetrisch, wenn

$$a_{ijk} = a_{ikj} = a_{jik} = a_{jki} = a_{kij} = a_{kji}$$

für alle $i, j, k \in \{1; \dots, n\}$.

Tatsächlich gibt es keinen Unterschied zwischen der Definition 3.29 und der üblichen Definition

eines symmetrischen Tensors. (siehe [3, 3.2.]

Wir bezeichnen mit $T^k(\mathbb{R}^n) := \mathbb{R}^n \otimes \cdots \otimes \mathbb{R}^n$ (k Kopien) die Menge aller kubischer Tensoren n -ter Dimension und k -ter Ordnung. Wir definieren eine Gruppenoperation Σ_k auf $T^k(\mathbb{R}^n)$ wie folgt. Für jedes $\sigma \in \Sigma_k$ und $x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_k} \in T^k(\mathbb{R}^n)$ schreiben wir

$$\sigma(x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_k}) = x_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes x_{i_{\sigma(k)}}$$

und erweitern das linear auf alle Elemente in $T^k(\mathbb{R}^n)$. Jedes $\sigma \in \Sigma_k$ definiert so einen linearen Operator $\sigma : T^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow T^k(\mathbb{R}^n)$. Die Standarddefinition eines symmetrischen Tensors sieht etwas anders aus als Definition 3.29 und ist gegeben durch Folgendes.

Definition 3.30. *Ein Tensor k -ter Ordnung $A \in T^k(\mathbb{R}^n)$ ist symmetrisch falls*

$$\sigma(A) = A$$

für alle Permutationen $\sigma \in \Sigma_k$ gilt. Die Menge der symmetrischen Tensoren in $T^k(\mathbb{R}^n)$ sei mit $S^k(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet.

Wir betrachten in den Einbettungen Tensoren der Form $\otimes^r u$ und M_r , wobei $u \in \mathbb{R}^3$ mit $\|u\| = 1$ ist. Die Einbettungen \mathcal{E}_K bilden alle nur in den Raum $S^k(\mathbb{R}^3)$ ab, denn die Tensoren sind alle symmetrisch. Das kann man wie folgt einsehen. Da in $\otimes^r u$ nur die Faktoren u vorkommen, ist $\sigma(\otimes^r u) = \otimes^r u$ für alle Permutationen σ , also $\otimes^r u \in S^r(\mathbb{R}^3)$. Da M_r ein symmetrisiertes Tensorprodukt ist, also $(M_r)_{j_1 \dots j_r}$ nur von der Anzahl der 1en, 2en und 3en unter den j_1, \dots, j_r abhängt, ist auch $M_r \in S^r(\mathbb{R}^3)$. Damit liegen die Bilder aller Einbettungen in einem Raum symmetrischer Tensoren über dem \mathbb{R}^3 . Wir wollen deren Dimension bestimmen.

Sei dazu $S : T^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow T^k(\mathbb{R}^n)$ der lineare Operator, der durch

$$S := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \sigma$$

definiert ist. Zu beachten ist, dass für jedes $\sigma \in \Sigma_k$ gilt $\sigma \circ S = S \circ \sigma = S$.

Wir benutzen eine Standardabkürzung, für beliebige $x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \in \mathbb{R}^n$ mit $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ schreiben wir

$$e_{i_1} \cdots e_{i_k} := S(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma(k)}}.$$

Da $S\sigma = S$, hängt der Tensor $e_{i_1} \cdots e_{i_k}$ nur von der Anzahl wie oft jedes e_i in dem Produkt vorkommt ab und wir schreiben $e_{i_1} \cdots e_{i_k} = e^{p_1} \cdots e^{p_n}$, wobei p_i die Anzahl (welche auch 0 sein kann) von den e_i in $e_{i_1} \cdots e_{i_k}$ ist. Zu beachten ist, dass p_1, \dots, p_n nicht negative ganze Zahlen mit $p_1 + \cdots + p_n = k$ sind. Es gilt der folgende Satz, siehe dazu auch [3, Prop. 3.4.].

Satz 3.31. *Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis des \mathbb{R}^n . Dann ist*

$$\{S(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}) \mid 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n\}$$

oder explizit

$$\left\{ \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma(k)}} \mid 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n \right\}$$

eine Basis von $S^k(\mathbb{R}^n)$. Weiterhin ist

$$\dim S^k(\mathbb{R}^n) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Beweis. Da $B = \{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 \leq n, \dots, 1 \leq i_k \leq n\}$ eine Basis für $T^k(\mathbb{R}^n)$ ist, und da S von $T^k(\mathbb{R}^n)$ auf $S^k(\mathbb{R}^n)$ abbildet, spannt die Menge

$$S(B) = \{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n\} = \{e^{p_1} \cdots e^{p_n} \mid p_1 + \dots + p_n = k\}$$

den Raum $S^k(\mathbb{R}^n)$ auf. Die Elemente in $S(B)$ sind linear unabhängig: Wenn $(p_1, \dots, p_n) \neq (q_1, \dots, q_n)$, dann sind die Tensoren $e^{p_1} \cdots e^{p_n}$ und $e^{q_1} \cdots e^{q_n}$ Linearkombinationen von zwei schnittfreien Teilmengen von Basiselementen von $T^k(\mathbb{R}^n)$. Die Kardinalität von $S(B)$ ist genau die Anzahl der Partitionen von k in eine Summe von n nicht negativen ganzen Zahlen, also $\binom{n+k-1}{k}$. \square

Für die Einbettungen \mathcal{E}_K bedeutet das, dass die $\otimes^r u$ in einem Unterraum des \mathbb{R}^d mit Dimension $\binom{r+2}{r} = \frac{(r+2)(r+1)}{2}$ liegen. Für die Symmetriegruppen $K = C_1$ und $K = D_2$ erhalten wir sogar noch einen Spezialfall, denn für Tensor zweiter Ordnung mit $u = (u_1, u_2, u_3)^\top \in \mathbb{R}^3$, $\|u\| = 1$ gilt

$$\otimes^2 u = \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_1 u_2 & u_2^2 & u_2 u_3 \\ u_1 u_3 & u_2 u_3 & u_3^2 \end{pmatrix},$$

wobei für die Elemente auf der Diagonalen gilt $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$. Statt Dimension $\binom{4}{2} = 6$ hat die Menge $\{\otimes^2 u - \frac{1}{3}I_3 \mid \|u\| = 1\}$ also nur Dimension 5.

Bemerkung 3.32. Die Dimensionen der Bilder der Einbettungen \mathcal{E}_K , welche wir damit erhalten sind in Tabelle 3.3 aufgelistet, siehe Tabelle 4 in [1].

4 Abschätzungen zwischen den Abständen in $SO(3)/K$ und den Abständen in der Einbettung

In diesem Abschnitt sei $\mathcal{E} : SO(3)/K \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine Abbildung mit den in Kapitel 3 besprochenen Eigenschaften. Wir wollen uns damit auseinandersetzen, wie die Einbettungen \mathcal{E}_K Abstände ändern. Damit die Einbettungen sinnvoll benutzt werden können, wäre es sehr gut, wenn der Abstand zwischen zwei Elementen $R, S \in SO(3)/K$ in der Einbettung ungefähr dem Abstand in $SO(3)$ entspricht. Dann könnte man für Optimierungsverfahren auf $SO(3)/K$ die Rotationen mithilfe von \mathcal{E}_K in \mathbb{R}^d einbetten, dort Optimierungsverfahren anwenden und anschließend daraus wieder eine Rotation aus $SO(3)/K$ ermitteln.

Im Nachfolgenden wollen wir uns für einige Gruppen K damit beschäftigen, wie wir die Abstände in den Einbettungen abschätzen können.

Dazu schauen wir uns zunächst einmal die Definition einer Abstandsfunktion an.

Definition 4.1. *Sei X eine beliebige Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Metrik bzw. Abstand, wenn für beliebige Elemente $x, y, z \in X$ die folgenden Axiome erfüllt sind:*

- *Positive Definitheit:* $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- *Symmetrie:* $d(x, y) = d(y, x)$,
- *Dreiecksungleichung:* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Wir definieren uns in beiden Räumen, in $SO(3)/K$ und im Vektorraum \mathbb{R}^d einen Abstand.

Definition 4.2. *Seien $R, S \in SO(3)/K$ beliebig, dann ist der Abstand in $SO(3)/K$ definiert durch*

$$d_K(R, S) = \min_{k \in K} d(Rk, S), \quad (4.1)$$

wobei $d(R, S)$ in $SO(3)$ gegeben ist durch

$$d(R, S) = \arccos \left(\frac{1}{2}(-1 + \operatorname{tr}(R^{-1}S)) \right) = \arccos \left(\frac{1}{2}(-1 + \operatorname{tr}(R^\top S)) \right).$$

Für Punkte $x_1, x_2 \in \mathcal{E}(SO(3)) \subset \mathbb{R}^d$ in der Einbettung benutzen wir den Euklidischen Abstand. Für diesen gilt

$$\begin{aligned} d(\mathcal{E}(R), \mathcal{E}(S)) &= \|\mathcal{E}(R) - \mathcal{E}(S)\| = \sqrt{\langle \mathcal{E}(R) - \mathcal{E}(S), \mathcal{E}(R) - \mathcal{E}(S) \rangle} \\ &= \sqrt{\|\mathcal{E}(R)\|^2 + \|\mathcal{E}(S)\|^2 - 2\langle \mathcal{E}(R), \mathcal{E}(S) \rangle} = \sqrt{2\rho_K^2 - 2\langle \mathcal{E}(R), \mathcal{E}(S) \rangle}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

In diesem Kapitel wollen wir überprüfen, ob wir Zusammenhänge zwischen den beiden Abständen herstellen können, also ob wir die Ungenauigkeit in

$$d(\mathcal{E}(R), \mathcal{E}(S)) \approx d_K(R, S) \quad (4.3)$$

beschreiben können.

4.1 Verbesserung der Einbettungen

In diesem Abschnitt wollen wir eine Änderung der Einbettungen aus [1] einführen, sodass wir für die Einbettungen noch eine zusätzliche Eigenschaft erhalten können, wie wir später sehen werden. Wir werden die Translation mit M_r in diesem Abschnitt nicht beachten, denn das hat keinen Einfluss auf Abstände.

Zur Vereinfachung zeigen wir erst einmal, dass wir statt beliebigen $R, S \in SO(3)/K$ auch $S = I_3$ wählen können.

Lemma 4.3. *Sei $\mathcal{E} : SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^{3^r}$ ein Homomorphismus, dann gilt*

$$\langle \mathcal{E}(R), \mathcal{E}(S) \rangle = \langle \mathcal{E}(S^\top R), \mathcal{E}(I_3) \rangle.$$

Insbesondere bleibt der Zusammenhang zwischen den Abständen in $SO(3)$ und in der Einbettung erhalten, wenn man statt beliebigen $R, S \in SO(3)$ nur die Abstände zwischen R und I_3 bzw. $\mathcal{E}(R)$ und $\mathcal{E}(I_3)$ betrachtet.

Beweis. Da $\Phi(R)$ und $\Phi(S)$ orthogonale Matrizen sind und da $(\otimes^r R) \cdot (\otimes^r S) = \otimes^r(RS)$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}(R), \mathcal{E}(S) \rangle &= \langle \Phi(R)\mathcal{E}(I_3), \Phi(S)\mathcal{E}(I_3) \rangle = \langle \Phi(S)^\top \Phi(R)\mathcal{E}(I_3), \mathcal{E}(I_3) \rangle = \langle \Phi(S^\top)\Phi(R)\mathcal{E}(I_3), \mathcal{E}(I_3) \rangle \\ &= \langle \Phi(S^\top R)\mathcal{E}(I_3), \mathcal{E}(I_3) \rangle = \langle \mathcal{E}(S^\top R), \mathcal{E}(I_3) \rangle. \end{aligned}$$

Wenn R und S jeweils alle Elemente aus $SO(3)/K$ durchlaufen, durchläuft $S^\top R$ auch alle Elemente aus $SO(3)/K$. Nach Gleichung (4.2) erhalten wir so alle Paare $(d_K(R, S), d(\mathcal{E}(R), \mathcal{E}(S)))$ auch indem wir nur die Fälle $(d_K(R, I_3), d(\mathcal{E}(R), \mathcal{E}(I_3)))$ betrachten. \square

Im Diagramm 4.1 ist der Zusammenhang der Abstände $d_K(R, S)$ und $d(\mathcal{E}(R), \mathcal{E}(S))$ für die Symmetriegruppen $K = C_r$, $K = D_r$ mit $r \in \{2, 3, 4, 6\}$, sowie $K = O$ dargestellt. Dabei zeigt die Farbe der eingezeichneten Punkte den Winkel zwischen der Rotationsachse, um die R dreht und die Rotationsachse der Symmetriegruppe K . Gelbe Punkte sind Drehungen um eine Achse nahe u_0 , dunkelblaue Punkte sind Drehungen um eine Achse nahe der Ebene, in der die u_j mit $j = 1, \dots, r$ liegen. Besonders bei den Symmetriegruppen C_4 und C_6 fällt auf, dass der Abstand $d(\mathcal{E}(R), \mathcal{E}(I_3))$ für große Abstände $d_K(R, I_3)$ wieder abnimmt, was nicht optimal ist für Abschätzungen der Form (4.3).

Vergleicht man die Einbettungen aus [1] aus der Tabelle 3.2 mit unseren Überlegungen aus Gleichung (3.11), sieht man, dass sie nicht genau übereinstimmen. Dazu betrachten wir das Beispiel $K = C_4$. Die bisher betrachtete Einbettung lautet

$$\mathcal{E}_{C_4}(R) = \left(Ru_0, \sum_{k \in C_4} \otimes^4 R(ku_1) \right).$$

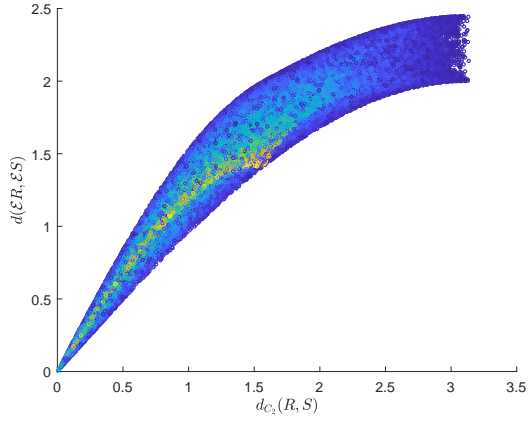
Nach der Theorie aus Abschnitt 3.2 wollen wir eine Einbettung der Form

$$\mathcal{E}_{C_4, u}^{(1,4)} = \left(\sum_{k \in C_4} R(ku_0), \sum_{k \in C_4} \otimes^4 R(ku_1) \right) = \left(4Ru_0, \sum_{k \in C_4} \otimes^4 R(ku_1) \right),$$

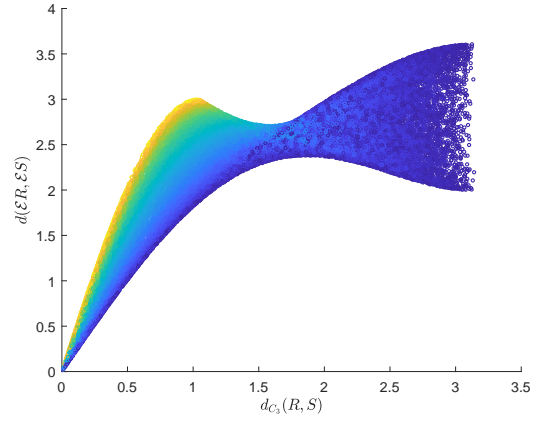
wobei $u = (u_0, u_1)$ und u_0 die Symmetrieachse ist. Es wäre also ein zusätzlicher Faktor a vor der ersten Komponente vorstellbar. Da fast alle bisher betrachteten Einbettungen aus Tabelle 3.2 nur eine oder zwei Komponenten haben, ist die Idee, die erste Komponente mit einem zusätzlichen Faktor a zu multiplizieren, um die Einbettungen zu verbessern.

Wenn wir die Einbettung

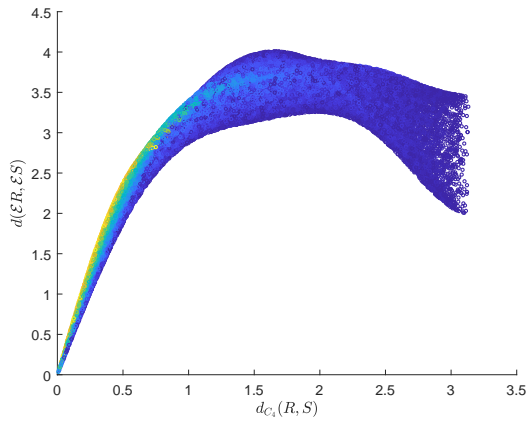
$$\mathcal{E}_{D_3}(R) = \left(\sum_{i=1}^3 \otimes^3 (Ru_i) \right)$$



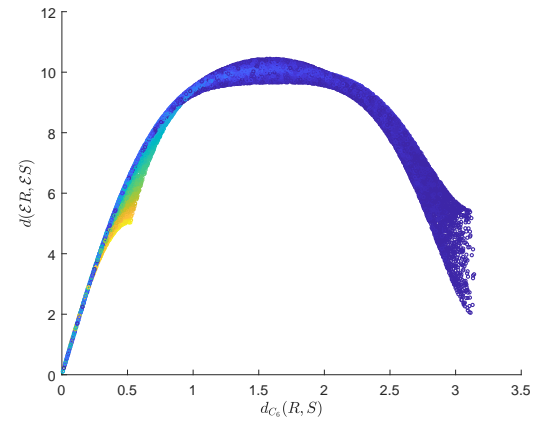
(a) Die Symmetriegruppe $K = C_2$



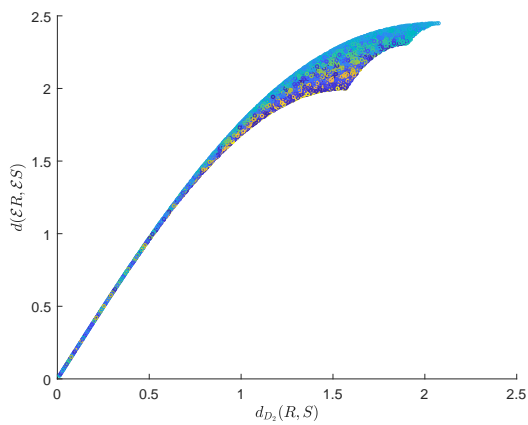
(b) Die Symmetriegruppe $K = C_3$



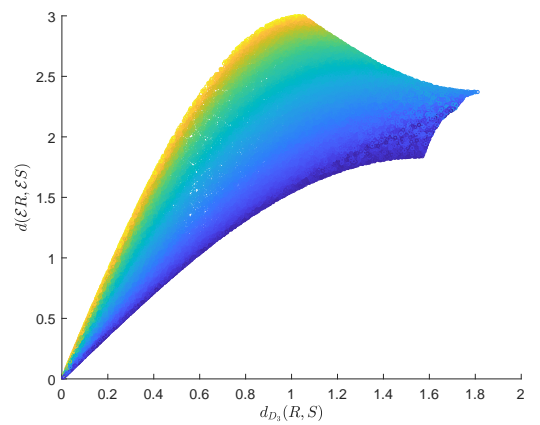
(c) Die Symmetriegruppe $K = C_4$



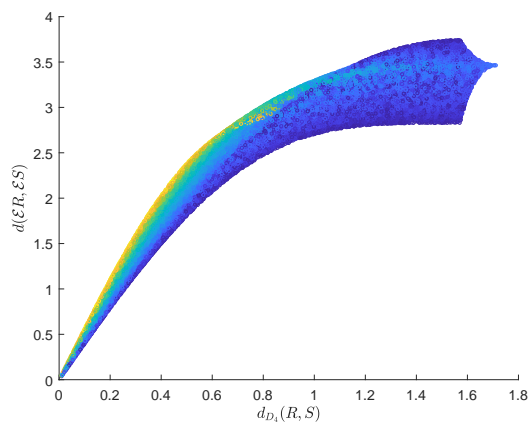
(d) Die Symmetriegruppe $K = C_6$



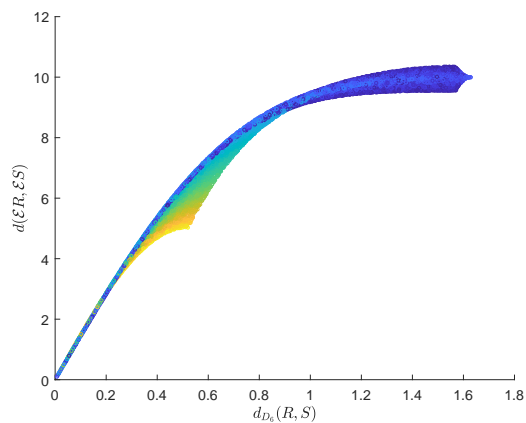
(e) Die Symmetriegruppe $K = D_2$



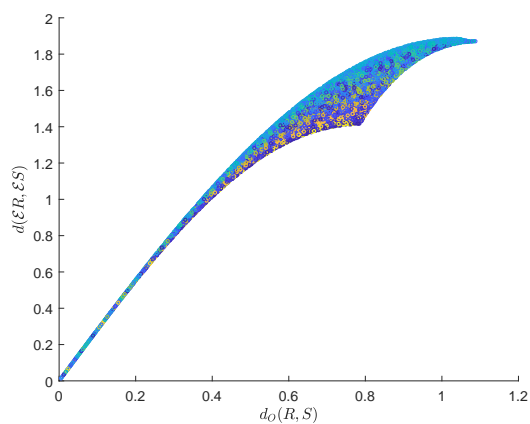
(f) Die Symmetriegruppe $K = D_3$



(g) Die Symmetriegruppe $K = D_4$



(h) Die Symmetriegruppe $K = D_6$



(i) Die Symmetriegruppe $K = O$

Abbildung 4.1: Zusammenhang der Abstände $d_K(R, S)$ und $d(\mathcal{E}(R), \mathcal{E}(S))$ für die verschiedene Symmetriegruppen

für beispielsweise $K = D_3$ anschauen, stellen wir fest, dass die Symmetriegruppe zusätzlich zu der dreizähligen Achse u_0 eine weitere zweizählige Symmetrieachse hat, wir bezeichnen sie mit u_1 . Nach Gleichung (3.11) könnten wir auch eine Einbettung der Form

$$\mathcal{E}_{D_3,u}^{(2,3)} = \left(a \cdot \otimes^2 R(u_0), \sum_{k \in D_3} \otimes^3 (Rku_1) \right)$$

betrachten. Mit der gleichen Argumentation können wir für die Symmetriegruppen $K = D_r$ mit $r \geq 3$ eine zusätzliche Komponente der Form $a \otimes^2 (Ru_0)$ einfügen. Wir werden im Folgenden untersuchen, ob wir durch diese Änderungen eine zusätzliche Eigenschaft, nämlich lokale Isometrie in der Identität, erhalten können.

Gehen wir die Theorie zu den Einbettungen noch einmal mit dem zusätzlichen Faktor a durch, sehen wir, dass alle Aussagen analog gelten. Die Matrix $\Phi(R)$ aus Satz 3.7 bleibt die gleiche, da in Gleichung (3.6) auf beiden Seiten der Faktor a bei den ersten Komponenten auftritt. Es gilt auch weiterhin, dass die Einbettungen auf einer Sphäre liegen, nur verändert sich der Radius, da sich $\|\mathcal{E}(I_3)\|$ verändert. Den Radius $\|\mathcal{E}(I_3)\|$ können wir in Abhängigkeit von a berechnen:

$$\rho_{C_4}^2 = \|\mathcal{E}_{C_4}(I_3)\|^2 = \left\| \left(au_0, \sum_{i=1}^4 \otimes^4(u_i) - \frac{4}{5}M_4 \right) \right\|^2 = a^2 + 2^{-4}4^2(2 + \binom{4}{2}) - \frac{4^2}{5} = a^2 + 4.8.$$

Auch die Sätze 3.20 und 3.24 lassen sich analog beweisen.

4.2 Lokale Abschätzung

In diesem Abschnitt wollen wir lokale Abschätzungen der Abstände in der Identität untersuchen. Dazu betrachten wir die Gruppe $SO(3)$ als Mannigfaltigkeit, also als einen topologischen Raum, der lokal dem euklidischen Raum \mathbb{R}^n gleicht. Um Aussagen über Abstände zu machen, brauchen wir die Definition eines Tangentialraumes T_pM , der eine Mannigfaltigkeit M in einem Punkt $p \in M$ approximiert, siehe dazu auch [2].

Definition 4.4. Sei M ein topologischer Raum. Wir sagen, M ist eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ($n \in \mathbb{N}$), wenn M die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- M ist ein Hausdorff-Raum.
- M erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.
- M ist lokal homöomorph zu einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n

Ein Paar (U, φ) heißt Karte, wenn $U \subset M$ offen ist und $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ ein Homöomorphismus in die offene Teilmenge $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ist. Eine Familie von Karten $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ heißt Atlas, wenn die Urbilder der Karten ganz M überdecken.

M heißt differenzierbare Mannigfaltigkeit, wenn für alle Karten $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ und $\psi : V \rightarrow \psi(V)$ alle Kartenübergänge

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$$

differenzierbar sind.

Definition 4.5. Gegeben seien eine Mannigfaltigkeit M , ein Punkt p aus M , eine offene Umgebung U von p und eine Karte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ist $\gamma : I \rightarrow M$ eine differenzierbare Kurve in M , wobei I ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist, das Null enthält, so ist $\varphi \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve im \mathbb{R}^n . Die Ableitung $(\varphi \circ \gamma)'(0)$ ist ein Vektor im \mathbb{R}^n . Kurven γ_i , für die $(\varphi \circ \gamma_i)'(0)$ übereinstimmt, bilden eine Äquivalenzklasse $[\gamma]$. Eine solche Äquivalenzklasse nennt man einen Tangentialvektor von M in p . Der Tangentialraum T_pM ist die Menge aller dieser Tangentialvektoren, man kann zeigen, dass er nicht von der Wahl der Karte φ abhängt.

Bemerkung 4.6. *Man kann zeigen, dass der Tangentialraum einer unendlich oft differenzierbaren Mannigfaltigkeit ein Vektorraum der gleichen Dimension wie die Mannigfaltigkeit ist.*

Wenn wir $SO(3)$ als Mannigfaltigkeit betrachten, reicht es aus die Kurven $\gamma_\xi(\omega) = R_\xi(\omega)$ zu untersuchen, wobei $R_\xi(\omega)$ wie in Definition 2.1 wieder die Drehungen um $\xi \in \mathbb{S}^2$ um den Winkel $\omega \in (-\pi, \pi]$ sind. Im Folgenden bezeichne $\{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardnormalbasis im \mathbb{R}^3 . Dann ist

$$\begin{aligned} R_{e_1}(\omega) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} = \gamma_{e_1}(\omega) \Rightarrow \left. \frac{d}{d\omega} \gamma_{e_1} \right|_{\omega=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ R_{e_2}(\omega) &= \begin{pmatrix} \cos \omega & 0 & -\sin \omega \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \omega & 0 & \cos \omega \end{pmatrix} = \gamma_{e_2}(\omega) \Rightarrow \left. \frac{d}{d\omega} \gamma_{e_2} \right|_{\omega=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ R_{e_3}(\omega) &= \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \gamma_{e_3}(\omega) \Rightarrow \left. \frac{d}{d\omega} \gamma_{e_3} \right|_{\omega=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also erhalten wir als Tangentialraum an die Identität

$$T_{I_3}(SO(3)) = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid A \text{ schiefsymmetrisch}\}.$$

Definition 4.7. *Eine riemannsche Mannigfaltigkeit ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M mit einer Funktion g , die jedem Punkt $p \in M$ ein Skalarprodukt des Tangentialraums $T_p M$ zuordnet, das heißt eine positiv definite, symmetrische Bilinearform*

$$g_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R},$$

die differenzierbar von p abhängt.

Da die Einbettungen in den \mathbb{R}^d abbilden, und $\mathcal{E}(SO(3))$ eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^d ist, brauchen wir noch den Tangentialraum $T_x \mathbb{R}^d$, welcher an jedem $x \in \mathbb{R}^d$ mit \mathbb{R}^d selbst identifiziert werden kann. Jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^d$ kann also mit der Kurve $\gamma: t \mapsto x + tv$ assoziiert werden. Um eine verallgemeinerte Ableitung für die Tangentialräume zu haben, definieren wir uns noch das Pushforward zur Abbildung $\mathcal{E}: SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Definition 4.8. *Die Abbildung*

$$(\mathcal{E}_*)_x: T_{id}SO(3) \rightarrow T_{\mathcal{E}(id)}\mathcal{E}(SO(3))$$

heißt Pushforward und ist definiert durch

$$(\mathcal{E}_*)_x[\gamma] = [\mathcal{E} \circ \gamma].$$

Wir haben also diese Abbildungen:

$$\begin{aligned} T_{id}SO(3) &\xrightarrow{\mathcal{E}_*} T_{\mathcal{E}(id)}\mathcal{E}(SO(3)), \\ SO(3) &\xrightarrow{\mathcal{E}} \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Definition 4.9. *Eine Abbildung $\mathcal{E}: SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^d$ heißt lokal isometrisch in der Identität $I_3 \in SO(3)$, wenn*

$$\langle x, y \rangle = \langle \mathcal{E}_*(x), \mathcal{E}_*(y) \rangle$$

für alle $x, y \in T_{I_3}SO(3)$ gilt.

Wir wollen überprüfen, ob die Einbettungen \mathcal{E} aus Abschnitt 3.4 dies erfüllen. Da die Translationen mit M_r im Bild keinen Einfluss auf die Tangentialräume haben, lassen wir sie im Folgenden zur besseren Übersichtlichkeit weg.

Bemerkung 4.10. *Für die lokale Isometrie reicht es zu zeigen, dass die Pushforward*

$$(\mathcal{E}_*)_{I_3} [\gamma_{e_i}] = \frac{d}{d\omega} \mathcal{E} \gamma_{e_i}(\omega) \Big|_{\omega=0}$$

ein Orthonormalsystem in $T_{\mathcal{E}(I_3)} \mathcal{E}(SO(3))$ bilden, da $\{\frac{d}{d\omega} \gamma_{e_i}(\omega)\}_{i=1}^3$ eine Orthonormalbasis in $T_{I_3} SO(3)$ ist.

Wenn wir die lokale Isometrie in der Identität zeigen können, folgt mit der Darstellung aus Satz 3.7 lokale Isometrie auch in den anderen Punkten.

Zunächst betrachten wir wieder die Symmetriegruppen C_4 und D_4 mit dem Vorfaktor a und versuchen a so zu bestimmen, dass \mathcal{E} eine lokale Isometrie wird.

Satz 4.11. *Die Einbettungen*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{C_4}(R) &= \left(4Ru_0, \sum_{i=1}^4 \otimes^4(Ru_i) \right) \\ \mathcal{E}_{D_4}(R) &= \left(\sqrt{8}(Ru_0)(Ru_0)^\top, \sum_{i=1}^4 \otimes^4(Ru_i) \right) \end{aligned}$$

sind lokal isometrisch in der Identität.

Beweis. Wir wählen $u_0 = (0, 0, 1)^\top$ und $u_1 = (1, 0, 0)^\top$. Für die Summierung folgt $ku_0 = u_0$ und $ku_1 \in \{(1, 0, 0)^\top, (0, 1, 0)^\top, (-1, 0, 0)^\top, (0, -1, 0)^\top\}$ für alle Elemente $k \in C_4$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \mathcal{E} \gamma_{e_1}(\omega) \Big|_{\omega=0} &= \frac{d}{d\omega} \left(a \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \omega \\ \cos \omega \end{pmatrix}, \otimes^4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \otimes^4 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \omega \\ -\sin \omega \end{pmatrix} + \otimes^4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \otimes^4 \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \omega \\ \sin \omega \end{pmatrix} \right) \Big|_{\omega=0} \\ &= \left(a \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_{e_1} \right), \end{aligned}$$

wobei A_{e_1} ein $3 \times 3 \times 3 \times 3$ -Tensor ist, der nur bei den vier Einträgen $(2, 2, 2, 3)$, $(2, 2, 3, 2)$, $(2, 3, 2, 2)$ und $(3, 2, 2, 2)$ eine -2 enthält und sonst Nullen. Denn die Ableitung von Termen der Form $\sin^x \omega \cos^y \omega$, wobei $x + y = 4$ ist, verschwindet an der Stelle Null für alle x und y , außer im Fall $x = 3$ und $y = 1$. Also folgt

$$\left\| \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}, A_{e_1} \right) \right\|^2 = a^2 + 4(-2)^2 = a^2 + 16.$$

Analog erhält man

$$\frac{d}{d\omega} \mathcal{E} \gamma_{e_2}(\omega) \Big|_{\omega=0} = \left(\begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_{e_2} \right),$$

wobei A_{e_2} ein $3 \times 3 \times 3 \times 3$ -Tensor ist, der nur bei den vier Einträgen $(1, 1, 1, 3)$, $(1, 1, 3, 1)$, $(1, 3, 1, 1)$ und $(3, 1, 1, 1)$ eine -2 enthält und sonst Nullen. Also folgt

$$\left\| \left(\begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_{e_2} \right) \right\|^2 = a^2 + 4(-2)^2 = a^2 + 16.$$

Diese beiden Vektoren in \mathbb{R}^d sind also für alle $a \in \mathbb{R}$ gleich lang und stehen auch senkrecht aufeinander, da sie nur an unterschiedlichen Stellen von Null verschieden sind. Betrachten wir also noch den letzten Vektor.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \mathcal{E}_{\gamma_{e_3}}(\omega) \Big|_{\omega=0} &= \frac{d}{d\omega} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \otimes^4 \begin{pmatrix} \cos \omega \\ \sin \omega \\ 0 \end{pmatrix} + \otimes^4 \begin{pmatrix} -\sin \omega \\ \cos \omega \\ 0 \end{pmatrix} + \otimes^4 \begin{pmatrix} -\cos \omega \\ -\sin \omega \\ 0 \end{pmatrix} + \otimes^4 \begin{pmatrix} \sin \omega \\ -\cos \omega \\ 0 \end{pmatrix} \right) \Big|_{\omega=0} \\ &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_{e_3} \right), \end{aligned}$$

wobei A_{e_3} ein $3 \times 3 \times 3 \times 3$ -Tensor ist, der nur bei den acht Einträgen $(1, 1, 1, 2)$, $(1, 1, 2, 1)$, $(1, 2, 1, 1)$ und $(2, 1, 1, 1)$ sowie $(2, 2, 2, 1)$, $(2, 2, 1, 2)$, $(2, 1, 2, 2)$ und $(1, 2, 2, 2)$ eine -2 enthält und sonst Nullen. Also folgt

$$\left\| \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_{e_3} \right) \right\|^2 = 4(-2)^2 + (-2)^2 = 32.$$

Die drei Vektoren stehen paarweise aufeinander senkrecht, da sie jeweils an verschiedenen Stellen von Null verschieden sind. Damit sie alle die gleiche Länge haben, muss gelten $a^2 + 16 = 32$, also $a = 4$.

Bei der Einbettung für die Symmetriegruppe D_4 besteht die Einbettung aus [1] nur aus der zweiten Komponente der Einbettung \mathcal{E}_{C_4} . Damit können aber die geforderten drei Tangentialvektoren nicht die gleiche Länge haben. Wir betrachten also die geänderte Einbettung der Form

$$\mathcal{E}_{D_4, u}^{(2,4)}(R) = \left(a \otimes^2 (Ru_0), \sum_{k \in D_4} \otimes^4 (Rku_1) \right)$$

mit einem Faktor $a \in \mathbb{R}_+$. Dann sind die Rechnung und die Überlegung genauso wie bei der Symmetriegruppe C_4 , nur die erste Komponente ist kein Vektor aus \mathbb{R}^3 , sondern eine 3×3 -Matrix. Dabei entsteht am Ende die Gleichung $2a^2 + 16 = 32$, also muss $a = \sqrt{8}$ sein. \square

Widmen wir uns der Symmetriegruppe C_2 und wählen $u_0 = (0, 0, 1)^\top$, $u_1 = (1, 0, 0)^\top$ und $u_2 = (0, 1, 0)^\top$. Bei einer Einbettung der Form

$$\mathcal{E}_{C_2}(R) = \left(aRu_0, (Ru_1)(Ru_1)^\top \right) \quad (4.4)$$

wird der Vektor u_2 überhaupt nicht betrachtet, obwohl es eine zweizählige Achse ist und u_0, u_1 sowie u_2 eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden. Es stellt sich heraus, dass die Einbettung (4.4) für keinen Faktor a eine lokale Isometrie ist, da die gewünschten Vektoren nie dieselbe Länge haben. Deswegen fügen wir der Einbettung eine zusätzliche Komponente hinzu, die von u_2 abhängt:

$$\mathcal{E}_{C_2}(R) = (aRu_0, \otimes^2(Ru_1), \otimes^2(Ru_2)) \quad (4.5)$$

Für diese Einbettung wollen wir wie bei der Symmetriegruppe C_4 den Faktor a so bestimmen, dass die Einbettung \mathcal{E}_{C_2} lokal isometrisch wird.

Satz 4.12. *Die Einbettungen*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{C_2}(R) &= \left(\sqrt{2}Ru_0, (Ru_1)(Ru_1)^\top, (Ru_2)(Ru_2)^\top \right) \\ \mathcal{E}_{D_2}(R) &= \left((Ru_1)(Ru_1)^\top, (Ru_2)(Ru_2)^\top, (Ru_3)(Ru_3)^\top \right) \end{aligned}$$

sind lokal isometrisch in der Identität.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\omega}\mathcal{E}\gamma_{e_1}(\omega)\Big|_{\omega=0} &= \left(a \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right), \\ \frac{d}{d\omega}\mathcal{E}\gamma_{e_2}(\omega)\Big|_{\omega=0} &= \left(a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \\ \frac{d}{d\omega}\mathcal{E}\gamma_{e_3}(\omega)\Big|_{\omega=0} &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).\end{aligned}$$

Diese drei Vektoren stehen senkrecht aufeinander, da sie an verschiedenen Stellen von Null verschieden sind. Damit sie auch gleich lang sind, muss gelten $a^2 + 2 = 4$, also $a = \sqrt{2}$. Bei der Symmetriegruppe D_2 sind schon drei orthogonale Vektoren berücksichtigt. Man sieht analog, dass die entsprechenden Vektoren ohne den Faktor a schon orthogonal und gleich lang sind. \square

Bei der Symmetriegruppen C_3 und D_3 gehen wir ganz genauso vor wie bisher.

Satz 4.13. *Die Einbettungen*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{C_3}(R) &= \left(\sqrt{\frac{135}{8}} Ru_0, \sum_{i=1}^3 \otimes^3(Ru_i) \right) \\ \mathcal{E}_{D_3}(R) &= \left(\frac{9\sqrt{7}}{8} (Ru_0)(Ru_0)^\top - \frac{1}{3}I_3, \sum_{i=1}^3 \otimes^3(Ru_i) \right)\end{aligned}$$

sind lokal isometrisch in der Identität.

Beweis. Wir wählen bei der Symmetriegruppe $K = C_3$ $u_0 = (0, 0, 1)^\top$ und $u_1 = (1, 0, 0)^\top$. Dann erhalten wir $ku_0 = u_0$ und $ku_1 \in \{(1, 0, 0)^\top, (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)^\top, (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)^\top\}$ für $k \in C_3$. Es ist

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\omega}\mathcal{E}\gamma_{e_1}(\omega)\Big|_{\omega=0} &= \frac{d}{d\omega} \left(a \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \omega \\ \cos \omega \end{pmatrix}, \otimes^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \otimes^3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega \end{pmatrix} + \otimes^3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega \end{pmatrix} \right) \Big|_{\omega=0} \\ &= \left(a \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, B_{e_1} \right),\end{aligned}$$

wobei B_{e_1} ein $3 \times 3 \times 3$ -Tensor ist, der fast überall verschwindet und nur an den sechs Stellen $(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 2, 1)$ und $(3, 1, 2)$ den Wert $-\frac{3}{4}$ annimmt. Es ist

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\omega}\mathcal{E}\gamma_{e_2}(\omega)\Big|_{\omega=0} &= \frac{d}{d\omega} \left(a \begin{pmatrix} -\sin \omega \\ 0 \\ \cos \omega \end{pmatrix}, \otimes^3 \begin{pmatrix} \cos \omega \\ 0 \\ \sin \omega \end{pmatrix} + \otimes^3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cos \omega \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \sin \omega \end{pmatrix} + \otimes^3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cos \omega \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \sin \omega \end{pmatrix} \right) \Big|_{\omega=0} \\ &= \left(a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B_{e_2} \right),\end{aligned}$$

wobei B_{e_2} ein $3 \times 3 \times 3$ -Tensor ist, der fast überall verschwindet und nur an den drei Stellen $(1, 1, 3), (1, 3, 1)$ und $(3, 1, 1)$ den Wert $\frac{3}{4}$ und an den drei Stellen $(2, 2, 3), (2, 3, 2)$ und $(3, 2, 2)$

den Wert $-\frac{3}{4}$ annimmt. Schließlich ist

$$\left. \frac{d}{d\omega} \mathcal{E}_{\gamma_{e_3}}(\omega) \right|_{\omega=0} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B_{e_3} \right),$$

wobei B_{e_3} ein $3 \times 3 \times 3$ -Tensor ist, der fast überall verschwindet und nur an den drei Stellen $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 1)$ und $(2, 1, 1)$ den Wert $\frac{9}{4}$ sowie an $(2, 2, 2)$ den Wert $-\frac{9}{4}$ annimmt. Diese drei Vektoren sind orthogonal, da sie jeweils nur an verschiedenen Stellen von Null verschiedene Werte enthalten. Die Normen

$$\begin{aligned} \left\| \left(a \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, B_{e_1} \right) \right\|^2 &= \left\| \left(a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B_{e_2} \right) \right\|^2 = a^2 + 6 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^2, \\ \left\| \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B_{e_3} \right) \right\|^2 &= 4 \cdot \left(\frac{9}{4} \right)^2 \end{aligned}$$

führen für a zu der Gleichung

$$a^2 + 6 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^2 = 4 \cdot \left(\frac{9}{4} \right)^2,$$

also ist $a = \sqrt{\frac{135}{8}}$.

Bei der Symmetriegruppe D_3 haben wir in der Einbettung aus [1] nur die hintere Komponente von \mathcal{E}_{C_3} . Die entsprechenden Vektoren sind nie gleich lang. Deswegen führen wir mit dem gleichen Argument wie oben eine erste Komponente $\otimes^2(Ru_0)$ ein, die von der zweizähligen Achse u_0 abhängt. Die Orthogonalität der Vektoren bleibt erhalten und wir bekommen die Gleichung

$$2a^2 + 6 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^2 = 4 \cdot \left(\frac{9}{4} \right)^2,$$

also muss $a = \frac{9\sqrt{7}}{8}$ gewählt werden. □

Für die Symmetriegruppen C_6 und D_6 können wir genauso vorgehen. Dabei entstehen 6-dimensionale Tensoren, deswegen sei hier nur das Ergebnis angegeben:

Satz 4.14. *Die Einbettungen*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{C_6}(R) &= \left(\frac{\sqrt{6}}{4} Ru_0, \sum_{i=1}^6 \otimes^6(Ru_i) \right) \\ \mathcal{E}_{D_6}(R) &= \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} (Ru_0)(Ru_0)^\top, \sum_{i=1}^6 \otimes^6(Ru_i) \right) \end{aligned}$$

sind lokal isometrisch in der Identität.

Damit haben wir für einige Symmetriegruppen die Einbettungen aus [1] so verändert, dass sie ihre Eigenschaften behalten und zusätzlich noch lokal isometrisch in der Null sind.

4.3 Globale Abschätzungen

Nachdem wir die Einbettungen so ändern konnten, dass sie lokal sehr gut abschätzbar sind, wollen wir nun überprüfen, ob auch globale Abschätzungen möglich sind. Rotationen, die in $SO(3)$ einen großen Abstand haben, sollten auch in der Einbettung weit voneinander entfernt sein und

umgekehrt nahe beieinanderliegende Rotationen sollten auch in der Einbettung nahe beieinander liegen. Am besten wäre es, wenn wir Abschätzungen der Form

$$c_{\min} \cdot d_K(R, S) \leq d(\mathcal{E}(R), \mathcal{E}(S)) \leq c_{\max} \cdot d_K(R, S) \quad (4.6)$$

mit möglichst nah beieinanderliegenden reellen c_{\min} und c_{\max} erhalten könnten. Wenn wir solche c_{\min} und c_{\max} haben, folgt daraus direkt die Injektivität der jeweiligen Abbildungen. (vgl. Satz 3.21)

Zunächst betrachten wir die Symmetriegruppe $K = C_1$, der wir uns im vorhergehenden Abschnitt nicht gewidmet haben, denn für $K = C_1$, ist der Zusammenhang zwischen $d_K(R, S)$ und $d(\mathcal{E}(R), \mathcal{E}(S))$ eindeutig, das zeigt der folgende Satz.

Satz 4.15. *Es gilt*

$$d(\mathcal{E}_{C_1}(R), \mathcal{E}_{C_1}(S)) = \sqrt{4 - 4 \cdot \cos(d_{C_1}(R, S))}. \quad (4.7)$$

Beweis. Seien $R, S \in SO(3)/K$ beliebig. Da R und S orthogonale Matrizen sind, das heißt die Inverse entspricht der transponierten Matrix, gilt mit Gleichung (4.2)

$$\begin{aligned} d(\mathcal{E}_{C_1}(R), \mathcal{E}_{C_1}(S)) &= \sqrt{2\rho_K^2 - 2\langle \mathcal{E}_{C_1}(R), \mathcal{E}_{C_1}(S) \rangle} = \sqrt{2\rho_K^2 - 2\operatorname{tr}(R^\top S)} = \sqrt{2\rho_K^2 - 2\operatorname{tr}(R^{-1}S)} \\ &= \sqrt{6 - 2(2\cos(d(R, S)) + 1)} = \sqrt{4 - 4\cos(d(R, S))}. \end{aligned}$$

Dabei benutzen wir, dass C_1 nur die Identität enthält, also in Gleichung (4.1) nur über ein Element minimiert wird. \square

Die Approximation in Gleichung (4.3) lässt sich also für $K = C_1$ sehr gut beschreiben. Diesen Zusammenhang sieht man in Abbildung 4.2. Für alle anderen von uns betrachteten Symmetrie-

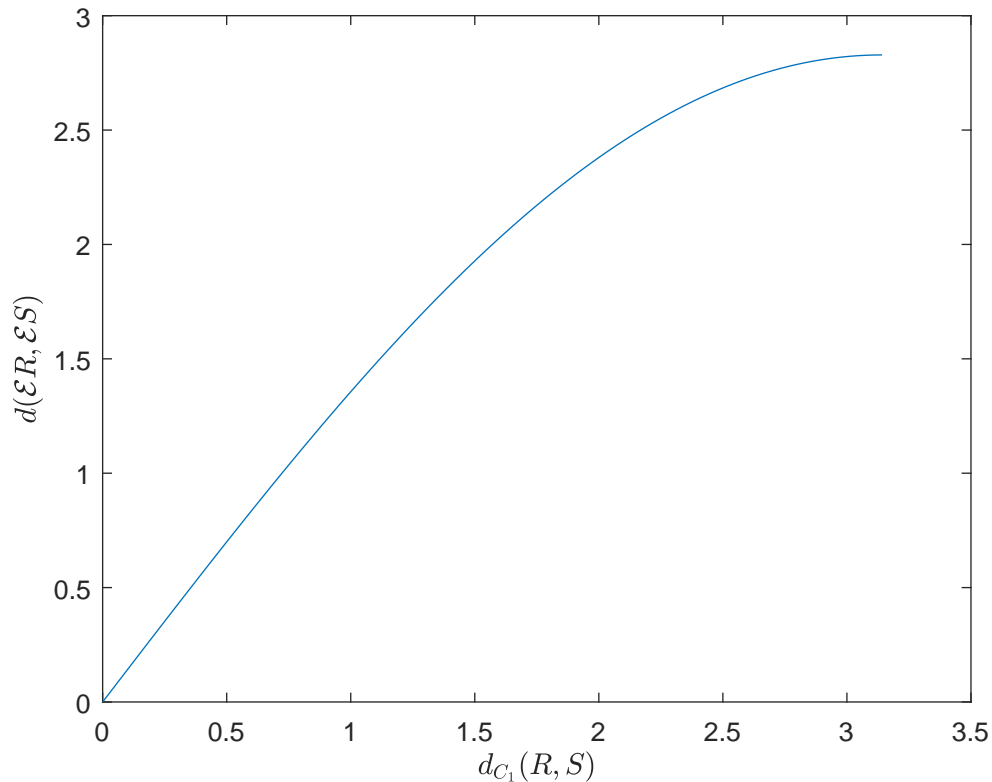


Abbildung 4.2: Zusammenhang der Abstände für die Symmetriegruppe $K = C_1$

gruppen ist der Zusammenhang der beiden Abstände nicht so eindeutig wie bei der Symmetriegruppe C_1 .

Betrachten wir nochmal die Einbettung für die Symmetriegruppe $K = C_4$ mit dem zusätzlichen Faktor a

$$\mathcal{E}_{C_4,u}^{(1,4)}(R) = \left(aRu_0, \sum_{k \in C_4} \otimes^4(Rku_1) \right).$$

Wenn wir für viele Paare $(d_{C_4}(R, S), d(\mathcal{E}(R), \mathcal{E}(S)))$ den Quotient

$$\frac{d(\mathcal{E}(R), \mathcal{E}(S))}{d_{C_4}(R, S)}$$

berechnen und dessen Minimum c_{\min} bzw. Maximum c_{\max} bestimmen, erhalten wir eine Abschätzung der Form (4.6). Für verschiedene a erhalten wir so die Werte aus Tabelle 4.1.

Dabei ist für $a = 4$ die Differenz $c_{\max} - c_{\min}$ am kleinsten. Für den Faktor $a = 4$ sieht man

a	c_{\min}	c_{\max}	$c_{\max} - c_{\min}$
1.0	0.6529	5.6470	4.9941
1.5	0.9645	5.6475	4.6830
2.0	1.2904	5.6490	4.3586
2.5	1.5974	5.6431	4.0457
3.0	1.9147	5.6486	3.7339
3.5	2.2384	5.6527	3.4143
4.0	2.5511	5.6566	3.1057
4.5	2.8748	6.0207	3.1459
5.0	3.2050	6.4024	3.1975
5.5	3.5221	6.8000	3.2779

Tabelle 4.1: Die Konstanten c_{\max} und c_{\min} der Symmetriegruppe $K = C_4$ für verschiedene Faktoren a

den Zusammenhang zwischen dem Abstand der Rotationen und dem Abstand in der Einbettung in Abbildung 4.3. Dabei ist die untere Schranke die Gerade $f_{\min}(x) = c_{\min} \cdot x$. Wenn wir die obere Schranke auch als Gerade wählen, ist diese für Rotationen R mit großem Abstand zu I_3 sehr weit weg von den Datenpunkten. Da der Abstand in der Einbettung höchstens $2\rho_K$ sein kann, können wir für die Symmetriegruppe $K = C_4$ für den Abstand in der Einbettung die obere Schranke $f_{\max}(x) = \min\{c_{\max} x, 2\rho_{C_4}\}$ benutzen.

Man sieht in Diagramm 4.3, dass der zusätzliche Faktor a sinnvoll ist, also dass der Zusammenhang für den Faktor $a = 4$ besser wird, aber eine globale Abschätzung für große Abstände sehr schlecht ist. Also kann man sagen, dass der Faktor $a = 4$ für die Symmetriegruppe $K = C_4$ optimal ist, denn er macht die Einbettung zu einer lokalen Isometrie und macht die globale Abschätzung besser. Genauso ist es auch für die anderen Symmetriegruppen, wir können lokale Isometrie erreichen, aber eine sehr gute globale Abschätzung ist schwierig.

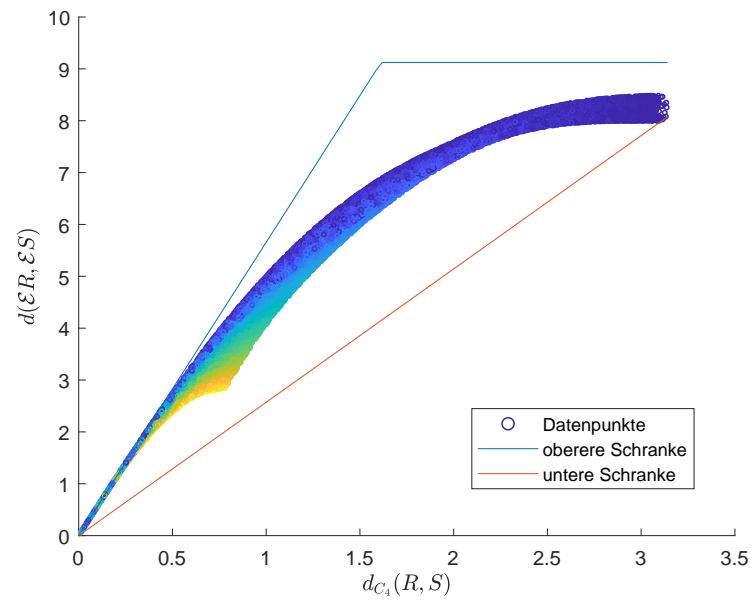


Abbildung 4.3: Zusammenhang der Abstände für die Symmetriegruppe $K = C_4$ mit dem Faktor $a = 4$

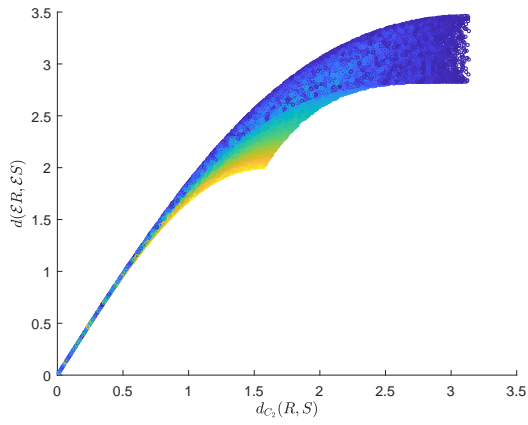
5 Fazit

Wir haben uns zuerst mit den euklidischen Einbettungen aus [1] auseinander gesetzt. Im vorhergehenden Kapitel haben wir uns gefragt, ob man die Einbettungen auch so verbessern kann, dass sie lokal isometrisch in der Null sind. Das bedeutet, der Zusammenhang der Abstände in $SO(3)/K$ und der Abstände in der Einbettung ist in der Identität annähernd linear. Die Zusammenfassung der verbesserten Einbettungen ist in Tabelle 5.1 zu sehen, dabei ist u_0 wieder die Drehachse. Der Anstoß zu einer Verbesserung waren die Diagramme in Abbildung 4.1. Insbeson-

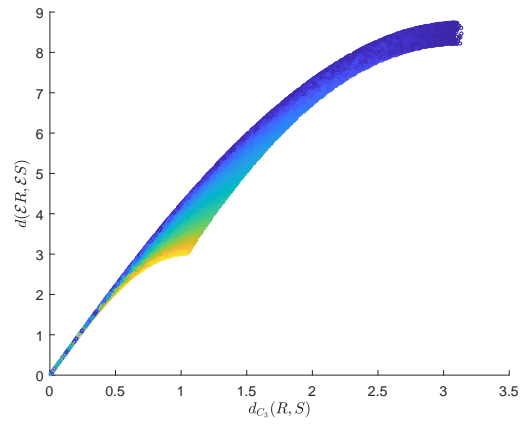
Gruppe K	\mathcal{E}_K	Vektorraum \mathbb{R}^d
C_1	$\mathcal{E}_{C_1}(R) = (Ru_1, Ru_2, Ru_3)$	\mathbb{R}^9
C_2	$\mathcal{E}_{C_2}(R) = (\sqrt{2} Ru_0, Ru_1(Ru_1)^\top - \frac{1}{3}I_3, Ru_2(Ru_2)^\top - \frac{1}{3}I_3)$	\mathbb{R}^{21}
C_3	$\mathcal{E}_{C_3}(R) = \left(\sqrt{\frac{135}{8}} Ru_0, \sum_{i=1}^3 \otimes^3 Ru_i \right)$	\mathbb{R}^{30}
C_4	$\mathcal{E}_{C_4}(R) = \left(4 Ru_0, \sum_{i=1}^4 \otimes^4 Ru_i - \frac{4}{5}M_4 \right)$	\mathbb{R}^{84}
C_6	$\mathcal{E}_{C_6}(R) = \left(\frac{\sqrt{6}}{4} Ru_0, \sum_{i=1}^6 \otimes^6 Ru_i - \frac{6}{7}M_6 \right)$	\mathbb{R}^{732}
D_2	$\mathcal{E}_{D_2}(R) = (Ru_1(Ru_1)^\top - \frac{1}{3}I_3, Ru_2(Ru_2)^\top - \frac{1}{3}I_3, Ru_3(Ru_3)^\top - \frac{1}{3}I_3)$	\mathbb{R}^{27}
D_3	$\mathcal{E}_{D_3}(R) = \left(\frac{9\sqrt{7}}{8} (Ru_0)(Ru_0)^\top - \frac{1}{3}I_3, \sum_{i=1}^3 \otimes^3 Ru_i \right)$	\mathbb{R}^{36}
D_4	$\mathcal{E}_{D_4}(R) = \left(\sqrt{8} (Ru_0)(Ru_0)^\top - \frac{1}{3}I_3, \sum_{i=1}^4 \otimes^4 Ru_i - \frac{4}{5}M_4 \right)$	\mathbb{R}^{90}
D_6	$\mathcal{E}_{D_6}(R) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} (Ru_0)(Ru_0)^\top - \frac{1}{3}I_3, \sum_{i=1}^6 \otimes^6 Ru_i - \frac{6}{7}M_6 \right)$	\mathbb{R}^{738}
O	$\mathcal{E}_O(R) = \otimes^4 Ru_1 + \otimes^4 Ru_2 + \otimes^4 Ru_3 - \frac{3}{5}M_4$	\mathbb{R}^{81}

Tabelle 5.1: Die verbesserten Einbettungen \mathcal{E}_K

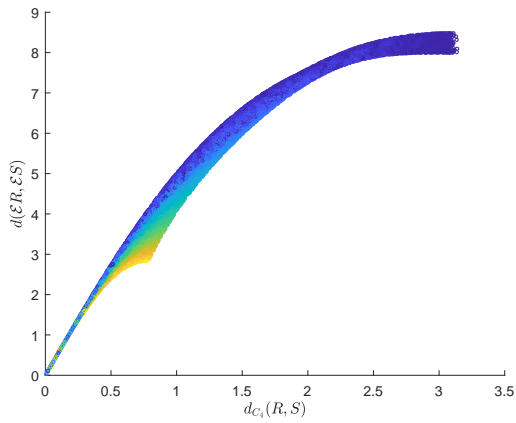
dere bei der Symmetriegruppe C_4 wurde der Abstand in der Einbettung für große Abstände in $SO(3)$ wieder kleiner. Auch bei anderen Symmetriegruppen wie C_2, C_3, D_3 und D_4 sah der Zusammenhang nicht optimal aus. In Diagramm 5.1 sind die Zusammenhänge der Abstände für die neuen, verbesserten Einbettungen zu sehen. Durch den zusätzlichen Faktor a bzw. die zusätzliche Komponente hat sich dieser Zusammenhang für einige Symmetriegruppen signifikant gebessert. Alle Eigenschaften der ursprünglichen Einbettungen sind dabei erhalten geblieben. Man kann also zusammenfassen, dass die neuen Einbettungen aus Tabelle 5.1 eine Verbesserung gegenüber den Einbettungen aus [1] sind.



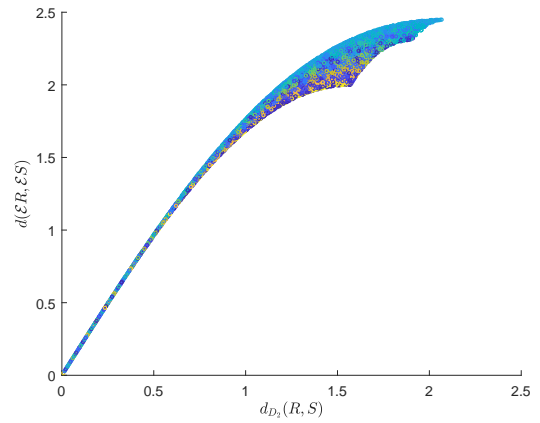
(a) Die Symmetriegruppe $K = C_2$



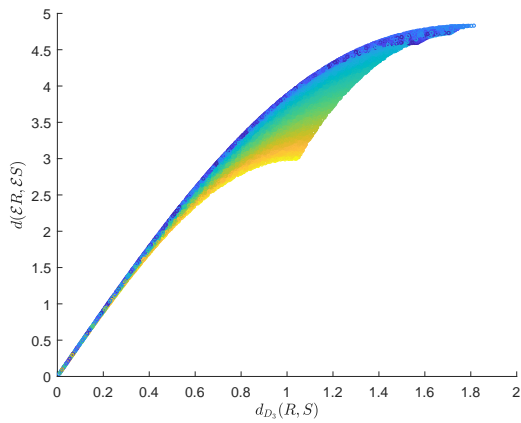
(b) Die Symmetriegruppe $K = C_3$



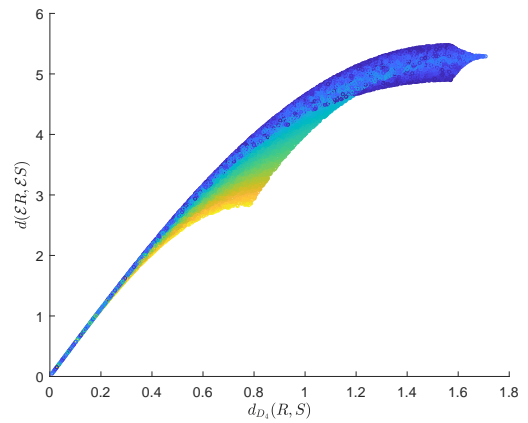
(c) Die Symmetriegruppe $K = C_4$



(d) Die Symmetriegruppe $K = D_2$



(e) Die Symmetriegruppe $K = D_3$



(f) Die Symmetriegruppe $K = D_4$

Abbildung 5.1: Zusammenhang der Abstände $d_K(R, S)$ und $d(\mathcal{E}(R), \mathcal{E}(S))$ für die verschiedenen Symmetriegruppen für die verbesserten Einbettungen

Literaturverzeichnis

- [1] R. Arnold, P. E. Jupp, and Schaeben. Statistics of ambiguous rotations. *Journal of Multivariate Analysis*, 165:73–85, 2018.
- [2] T. Aubin. *A Course in Differential Geometry*. Graduate studies in mathematics, 2001.
- [3] P. Comon, G. Golub, L.H. Lim, and B. Mourrain. Symmetric Tensors and Symmetric Tensor Rank. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 30(3):1254–1279, 2008.
- [4] M. Günther. Isometric embeddings of Riemannian manifolds. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 2:1137–1143, 1990.
- [5] W. H. Greub. *Multilinear Algebra*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 136, 1967.
- [6] A. Miller. *Symmetry Groups and their Applications*. Academic Press, 1972.
- [7] J. Nash. The imbedding problem for Riemannian manifolds. *The annals of Mathematics*, 63(1):20–63, 1956.