Vorlesung

Grundlagen der Differentialgeometrie

Prof. Dr. Arnd Meyer
Dipl.-Math. techn. Andreas Steinbrecher
Technische Universität Chemnitz

Oktober 2000

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen - Vektorrechnung **9**
- 1.1 Skalar-, Kreuz- und Spatprodukt im $\mathbf{R}^3$ . . . 9
- 1.2 Geraden und Ebenen im $\mathbf{R}^3$ . . . 12
- 1.3 Vektoren und Funktionen im $\mathbf{R}^3$ . . . 12
  - 1.3.1 Skalare Felder . . . 12
  - 1.3.2 Vektorfunktion von einem Parameter . . . 13
  - 1.3.3 Vektorfunktionen von zwei Parametern . . . 14
  - 1.3.4 Vektorfunktion von drei Parametern (Vektorfelder) . . . 14

2 Kurventheorie **17**
- 2.1 Parameterdarstellung . . . 17
- 2.2 Bogenlänge . . . 18
- 2.3 Das begleitende Dreibein . . . 21
- 2.4 Die Frenetschen Formeln und der Hauptsatz der Kurventheorie . . . 25
- 2.5 Schmiegeebene - Normalebene - Streckebene . . . 30
  - 2.5.1 Einführung . . . 30
  - 2.5.2 Projektionen in die Schmiegeebene, Normalebene und Streckebene . . . 31
- 2.6 Spezielle Kurven . . . 33
  - 2.6.1 Evoluten, Evolventen und der Krümmungsmittelpunkt . . . 33
  - 2.6.2 Böschungslinie . . . 35
  - 2.6.3 Klothoide . . . 37

3 Flächen im Raum **39**
- 3.1 Parameterdarstellung . . . 39
  - 3.1.1 Grundlagen . . . 39
  - 3.1.2 Tangentialebene, Normalenvektor und das begleitende Dreibein . . . 42
  - 3.1.3 Parametertransformation . . . 43
  - 3.1.4 Spezielle Flächen und ihre Gaußsche Parameterdarstellung . . . 43
- 3.2 Spezielle Flächen . . . 45
  - 3.2.1 Regelflächen, Tangentenflächen und Torsen . . . 45
  - 3.2.2 Röhrenflächen und der Torus . . . 52
- 3.3 Bogen-, Oberflächenelemente und 1. metrische Fundamentalgröße . . . 54
  - 3.3.1 Bogenlänge von Flächenkurven aus 1. metrischer Fundamentalgröße . . . 55
  - 3.3.2 Schnittwinkel von Teilkurven aus 1. metrischer Fundamentalgröße . . . 56
  - 3.3.3 Flächeninhalte aus 1. metrischer Fundamentalgröße . . . 57
- 3.4 Krümmungstheorie der Flächen - 2. metrische Fundamentalgröße . . . 59
  - 3.4.1 Normalkrümmung, geodätische Krümmung und 2. metrische Fundamentalgröße . . . 59
  - 3.4.2 Problem der extremalen Normalkrümmung . . . 62
  - 3.4.3 Mittlere und Gaußsche Krümmung . . . 66
- 3.5 Ableitungsgleichung von Gauß und Weingarten . . . 69
- 3.6 Geodätische Krümmung und geodätische Linien . . . 72
  - 3.6.1 Geodätische Linien . . . 74
  - 3.6.2 Allgemeines Studium der geodätischen Linien auf Rotationsflächen . . . 79
- 3.7 Minimalflächen . . . 81
- 3.8 Die innerer Geometrie von Flächen . . . 86

3.8.1 Abwickelbarkeit und Verbiegbarkeit 87
3.8.2 Weitere innergeometrische Größen 89
3.9 „Curvatura Integra“ und der Satz von Gauß und Bonnet 96
3.10 Besondere Parametrisierungen 100
3.10.1 Geodätische Polarkoordinaten 100
3.10.2 Paramterisierung durch Krümmungslinien 102

4 Anwendung - Bestimmung des Volumens einer gebogenen Schale 107

5 Formelsammlung 113
5.1 Kurventheorie 113
5.2 Flächen im Raum 114

Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen und Indizes

Formelzeichen

∇	Gradient eines Skalaren Feldes
Δ	differenziell kleiner Teil einer Kurve oder Fläche
$\mathbf{A}, ..., \mathbf{Z}$	Matrizen
$\mathbf{a}, ..., \mathbf{z}$	Vektoren des euklidischen Vektorraumes $\mathbf{R}^3$
$\underline{a}, ..., \underline{z}$	Vektoren der Parameterebene $\mathbf{R}^2$
$a_{ij}, ..., z_{ij}$	Elemente von Matrizen
$a_i, ..., z_i$	Elemente von Vektoren
$\alpha, ..., \omega$	Skalare
$\mathbf{a}$	Richtungsvektor bestimmter Kurven oder Flächen
$A_i(\cdot, \cdot)$	Funktion zur Beschreibung der 1. metr. Fundamentalgröße
A_F, A_O	Flächeninhalt
$A_{\hat{F}}$	Gesamtkrümmung
$A_{P_{\Delta I}}$	Flächeninhalt des Parallelogramms $P_{\Delta I}$
$\mathbf{b}(\cdot)$	Binormalenvektor einer Kurve
$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$	Flächenorthonormalsystem
B	Körper im Raum
c	konstanter Parameter
$\mathbf{C}^r(\mathbf{T})$	Menge aller im Gebiet $\mathbf{T}$ r-mal stetig differenzierbaren Funktionen
d	Dicke einer Schale
dA_F	Flächenelement
dV	Volumenelement
δ_{ij}	Kroneckersymbol
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	Basisvektoren des $\mathbf{R}^3$
$\mathbf{e}(\cdot)$	Parameterdarstellung der Evolventen einer Kurve im Raum
E	Ebene
E^i_λ	Ebenenschar
E_N	Normalenebene einer Kurve
E_S	Schmeigeebene einer Kurve
E_{St}	Streckebene einer Kurve
E_T	Tangentialebene einer Fläche
E_{T_ϵ}	um ein ϵ verschobene Tangentialebene einer Fläche
$f(\cdot, \cdot)$	Funktion zweier Parameter zur expliziten Darstellung von Flächen
$\mathbf{f}$	Flächennormalenvektor
F	Fläche im Raum
$F_{\triangle(\mathbf{a},\mathbf{b})}$	Flächeninhalt des durch $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Dreiecks
g_{ij}	Matrixelemente der 1. metrische Fundamentalgröße
g^{ij}	Matrixelemente der Inversen der 1. metrische Fundamentalgröße
G	Gerade
G_λ, G_μ	Geradenscharen
$\mathbf{G}$	1. metrische Fundamentalgröße
γ	Kurve in der Parameterebene
γ_h	Diskretisierung eines Intervalls $[a, b]$
Γ	Kurve im Raum
Γ_0, Γ_y	ausgezeichnete geodätische Linien bei den geodätischen Polarkoordinaten
Γ_1, Γ_2	Koordinatenlinien einer Fläche
Γ_e	Evolvente einer Kurve im Raum
Γ_m	Evolute einer Kurve im Raum
Γ^k_{ij}	Christoffel-Symbol
h	Höhenangabe
H	mittlere Krümmung
$\mathbf{i}$	Basisvektore des $\mathbf{R}^3$ (entspricht $\mathbf{e}_1$)
I	Indikatrix

$\mathbf{I}$	Wertebereich der Flächenparameter u^i
$\mathbf{j}$	Basisvektore des $\mathbf{R}^3$ (entspricht $\mathbf{e}_2$)
$\mathbf{J}(\cdot), \mathbf{J}_F(\cdot,\cdot)$	Jacobimatrix, einer Fläche
$k(\cdot)$	Krümmung einer Kurve
$k_g(\cdot)$	geodätische Krümmung einer Kurve
$k_n(\cdot)$	Normalkrümmung einer Kurve
k_{nmax}, k_{nmin}	extremale Normalkrümmung einer Kurve
$\mathbf{k}$	Basisvektore des $\mathbf{R}^3$ (entspricht $\mathbf{e}_3$)
K	Gaußsche Krümmung
$K(\cdot)$	Kreis bei Betrachtung der Evoluten
l_i	Länge eines Geradenstückes
l_{ij}	Matrixelemente der 2. metrische Fundamentalgröße
$L(\cdot)$	Länge eines Polygonzuges oder eines Kurvenabschnittes
$\mathbf{L}$	2. metrische Fundamentalgröße
λ, λ_i	Eigenwerte
$\lambda_{min}, \lambda_{max}$	minimaler und maximaler Eigenwert
$m(\cdot)$	Parameterdarstellung einer Evoluten
$\mathbf{m}(\cdot)$	Parameterdarstellung der Evoluten - Kurve der Krümmungsmittelpunkte
$M(\cdot)$	Mittelpunkt eines Kreis bei Betrachtung der Evoluten
$\mu(\cdot)$	Raileigh-Quotient
$\mathbf{n}(\cdot)$	Hauptnormalenvektor einer Kurve
$\mathbf{n}^i_\lambda$	Hauptnormalenvektoren von Kurven
N	Gauß-Abbildung
$\nu(\cdot)$	innergeometrische Größe
$O(\cdot)$	Landausymbol
Ω	Wertebereich der Körperparameter ξ_i
p	Geschlecht
$P_{\Delta I}$	Parallelogramms
r	Radius, Radius der geodätischen Polarkoordinatenparametrisierung
$\mathbf{r}_i$	Tangentialrichtung der extremalen Normalkrümmung
R	Radius
$\mathbf{R}$	Raum der reellen Zahlen
$\mathbf{R}(\cdot,\cdot)$	Restglied der Taylorentwicklung
$\mathbf{R}^2$	Euklidischer zweidimensionaler Vektorraum
$\mathbf{R}^3$	Euklidischer dreidimensionaler Vektorraum
$\mathbf{R}^+$	Raum der nichtnegativen reellen Zahlen
$\mathbf{R}^{n\times n}$	Raum der quadratischen Matrizen
s	natürlicher Kurvenparameter
s_r, s_φ	Bogenlänge der Koordinatenlinien der geodätischen Polarkoordinaten
$s(t)$	Bogenlänge eines Kurvenstückes
$\mathbf{S}$	Wertebereich des natürlichen Kurvenparameters s
t, τ	Kurvenparameter
$\mathbf{t}(\cdot)$	Tangentialvektor einer Kurve
$\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_0$	ausgezeichnete Tangentialvektoren
$\mathbf{t}_i(\cdot,\cdot)$	Tangentialvektoren einer Fläche
$\mathbf{T}$	Wertebereich des Kurvenparameters t
Θ	Winkel zwischen Breitenkreisen und geodätischen Linien
$u^i, \underline{u}$	Flächenparameter bzw. Vektor der Flächenparameter
$v^i, \underline{v}$	Flächenparameter bzw. Vektor der Flächenparameter
$\mathbf{V}$	Vektorraum
$V_{\text{Tetraeder }(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}$	Volumeninhalt des durch $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ aufgespannten Tetraeders
w	Windung einer Kurve
ω	Gebiet in der Parameterebene
$\mathbf{x}_0$	fester Bezugspunkt einer Fläche im $\mathbf{R}^3$
$x_i(\cdot,\cdot)$	i-te Koordinate der Parameterdarstellung einer Fläche
$\mathbf{x}(\cdot,\cdot)$	Parameterdarstellung einer Fläche
$\mathbf{x}_{,i}(\cdot,\cdot)$	Tangentialvektoren einer Fläche

$\mathbf{X}'$	Matrix die als Spalten die Tangentialvektoren einer Fläche enthält
$\xi(\cdot)$	skalares Feld
ξ_1, ξ_2, ξ_3	Parameter eines Körpers
$y_i(\cdot)$	i-te Koordinate der Parameterdarstellung einer Kurve
$\mathbf{y}$	Punkt im $\mathbf{R}^n$
$\mathbf{y}(\cdot)$	Parameterdarstellung einer Kurve
$\mathbf{y}_N(\cdot)$	Projektion einer Kurve in die Normalebene
$\mathbf{y}_S(\cdot)$	Projektion einer Kurve in die Schmiegeebene
$\mathbf{y}_{St}(\cdot)$	Projektion einer Kurve in die Streckebene
φ	Winkel, Winkelparameter der geodätischen Polarkoordinatenparametrisierung
$z_i(\cdot,\cdot,\cdot)$	i-te Koordinate der Parameterdarstellung einer Vektorfeldes
$\mathbf{z}(\cdot,\cdot,\cdot)$	Parameterdarstellung eines Vektorfeldes

Kapitel 1

Grundlagen - Vektorrechnung

1.1 Skalar-, Kreuz- und Spatprodukt im $\mathbf{R}^3$

Definition 1.1.1 (Vektorraum) *Eine nichtleere Menge* $\mathbf{V}$, *für deren Elemente eine Addition* $(+)$ *und eine Multiplikation* $(\cdot)$ *mit reellen Zahlen erklärt ist, heißt reeller Vektorraum* $\mathbf{V} = [V, +, \cdot]$ *und ihre Elemente Vektoren, wenn folgende Axiome erfüllt sind:*

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbf{V} \qquad \lambda, \mu \in \mathbf{R}$$

Addition:	$\mathbf{a}+\mathbf{b}$	$\in$	$\mathbf{V}$	*Ausführbarkeit*
	$\mathbf{a}+\mathbf{b}$	$=$	$\mathbf{b}+\mathbf{a}$	*Kommutativgesetz*
	$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$	$=$	$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$	*Assoziativgesetz*
	$\mathbf{a}+\mathbf{x}$	$=$	$\mathbf{b}$	*zu* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *gibt es stets genau ein* $\mathbf{x}$
skalare Multiplikation:	$\lambda\mathbf{a}$	$\in$	$\mathbf{V}$	*Ausführbarkeit*
	$1\mathbf{a}$	$=$	$\mathbf{a}$	$\rightarrow \lambda\mathbf{a}$ *ist das* λ*-fache von* $\mathbf{a}$
	$(\lambda+\mu)\mathbf{a}$	$=$	$\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$	*Distributivgesetz*
	$\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})$	$=$	$\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$	*Distributivgesetz*
	$\lambda(\mu\mathbf{a})$	$=$	$(\lambda\mu)\mathbf{a}$	*Assoziativgesetz*

Es existiert ein sogenannter Nullvektor $\mathbf{0}$ für den $\mathbf{a}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{a} = \mathbf{a}\ \forall\mathbf{a}$ gilt so, daß $\forall\mathbf{a}\ \exists -\mathbf{a} : \mathbf{a}+(-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Im weiteren sollen die Eigenschaften von Kurven und Flächen im Vektorraum $\mathbf{R}^3 = [\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}, +, \cdot]$ untersucht werden. Zur Definition der Vektoren, sei die kanonische Basis

$$\mathbf{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zugrunde gelegt. Jeder Vektor $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$ läßt sich somit als Linearkombination der drei Basisvektoren darstellen.

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$$

Demnach können die Vektoren durch folgende Darstellung charakterisiert werden.

$$\forall\mathbf{a} \in \mathbf{V} \ \text{ gilt } \ \mathbf{a} \leftrightarrow (a_1, a_2, a_3)^T$$

Diese Darstellung $\mathbf{a} \leftrightarrow (a_1, a_2, a_3)^T \in \mathbf{R}^3$ ist bei fester Basis $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ erlaubt. Sonst muß bei dieser Darstellung die entsprechende Basis angegeben werden. Die Addition und die Multiplikation mit einer reellen Zahl sind durch die folgenden Vorschriften definiert und erfüllen die obigen Forderungen.

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}, \quad \lambda\mathbf{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$$

Führt man in einem Vektorraum ein Skalarprodukt $(\cdot,\cdot) : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ ein, so nennt man ihn euklidischen Vektorraum. Im weiteren soll nun der euklidische Vektorraum $\mathbf{R}^3 = [\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}, +, \cdot, (\cdot,\cdot)]$ mit dem folgenden Skalarprodukt untersucht werden.

Definition 1.1.2 (Skalarprodukt im euklidischen Raum $\mathbf{R}^3$) *Die Abbildung $(\cdot,\cdot) : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ wird als Skalarprodukt des euklidischen Raumes $\mathbf{R}^3$ bezeichnet, wenn gilt*

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{a},\mathbf{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Definition 1.1.3 (Norm bzw. Betrag im euklidischen Raum $\mathbf{R}^3$) *Die Abbildung $|\cdot| : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^+$ wird als Norm bzw. Betrag des euklidischen Raumes $\mathbf{R}^3$ bezeichnet, wenn gilt*

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2}.$$

Folgerung:

- $(\mathbf{a},\mathbf{b}) := |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|\ \cos(\sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{b}))$
- $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{b},\mathbf{a})$ (kommutativ)
- $((\lambda\mathbf{a}),\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a},\mathbf{b})$
- $|\mathbf{e}_i| = 1\ ;\ (\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) = 0\ \forall i \neq j$
- $((\mathbf{a}+\mathbf{b}),\mathbf{c}) = (\mathbf{a},\mathbf{c}) + (\mathbf{b},\mathbf{c})$ (distributiv)
- $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0 \ \Leftrightarrow\ \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$

Definition 1.1.4 (Determinante einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ oder $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{3\times 3}$) *Jeder quadratischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{ij=1}^n \in \mathbf{R}^{n\times n}$ mit reellen Elementen läßt sich auf eindeutige Weise eine reelle Zahl $det(\mathbf{A})$ zuordnen, die man als Determinante von $\mathbf{A}$ bezeichnet. Es ist*

$$det(\mathbf{A}) = det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Insbesondere lassen sich für quadratische Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ bzw. $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{3\times 3}$ die zugehörigen Determinanten durch die folgenden Vorschriften angeben.

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}$$

Definition 1.1.5 (Kreuzprodukt im euklidischen Raum $\mathbf{R}^3$) *Die Abbildung* $(\cdot \times \cdot) : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *wird als Kreuzprodukt bezeichnet.*

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Folgerung:

- $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|\ \sin(\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = 2F_{\triangle(\mathbf{a},\mathbf{b})}$

  $F_{\triangle(\mathbf{a},\mathbf{b})}$ entspricht dem Flächeninhalt des durch $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Dreiecks.
- $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ bilden ein Rechtssystem
- $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$
- $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$
- $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}\ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$

  Der Vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ steht senkrecht auf der durch $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Ebene.
- $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b}$
- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b}$ linear abhängig (kolinear)

Bemerkung: Die Eigenschaft eines, nicht notwendig orthogonalen, Systems dreier Vektoren $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ ein Rechts- bzw. Linkssysteme zu sein, läßt sich auf verschiedene Arten charakterisieren. Zum einen durch die sogenannte Handregel. Hält man die rechte Hand so, daß der Zeigefinger senkrecht zum Daumen, und der Mittelfinger wiederum senkrecht zu allen beiden steht, und kann man das Vektorsystem $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ so drehen, daß $\mathbf{a}$ parallel zum Daumen, $\mathbf{b}$ parallel zum Zeigefinger und $\mathbf{c}$ parallel zum Mittelfinger ist, so nennt man dieses Vektorsystem ein Rechtssystem. Die Art der Bestimmung mit der rechten Hand, nennt man die Rechte-Hand-Regel. Die analoge Vorgehensweise mit der linken Hand wird als Linke-Hand-Regel bezeichnet, und ein System, welches dieser Regel genügt wird als Linkssystem bezeichnet.
Eine andere Möglichkeit der Bestimmung basiert auf Rechts- bzw. Linksschrauben. Dreht man eine Rechtsschraube um die Achse $\mathbf{c}$ von $\mathbf{a}$ auf $\mathbf{b}$ und die Schraube bewegt sich in Richtung des Vektors $\mathbf{c}$ so nennt man das Vektorsystem ein Rechtssystem und die Regel die Rechtsschraubenregel. Entspricht das Vektorsystem der analogen Vorgehensweise, jedoch mit einer Linksschraube, so nennt man das Vektorsystem ein Linkssystem und die Regel die Linksschraubenregel.

Definition 1.1.6 (Spatprodukt im euklidischen Raum $\mathbf{R}^3$) *Die Abbildung* $[\cdot,\cdot,\cdot] : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ *wird als Spatprodukt bezeichnet.*

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Folgerung:

- $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]| = 6V_{\text{Tetraeder }(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}$ entspricht dem 6-fachen des Tetraedervolumens
- $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] > 0$ $\Rightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ bilden ein Rechtssystem
- $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = 0$ $\Rightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ linear abhängig (komplanar)
- $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] < 0$ $\Rightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ bilden ein Linkssystem

Formeln zum Skalar-, Kreuz- und Spatprodukt: Für beliebige $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbf{R}^3$ gilt:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a}, \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{a}, \tag{1.1-1}$$

$$((\mathbf{a}\times\mathbf{b}),(\mathbf{c}\times\mathbf{d})) = (\mathbf{a},\mathbf{c})(\mathbf{b},\mathbf{d})-(\mathbf{a},\mathbf{d})(\mathbf{b},\mathbf{c}), \qquad \text{Lagrangesche Identität} \tag{1.1-2}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) &= [\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d}]\mathbf{b}-[\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}]\mathbf{a}\\ [\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] &= (\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{b}\times\mathbf{c},\mathbf{a}) = [\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}].\end{aligned} \tag{1.1-3}$$

1.2 Geraden und Ebenen im $\mathbf{R}^3$

Wir identifizieren Punkte $\mathbf{x}$ im Raum $\mathbf{R}^3$ mit dem Ortsvektor $\mathbf{x} = (\vec{0\mathbf{x}})$.

Definition 1.2.1 (Gerade im $\mathbf{R}^3$) *Eine Vektormenge (eigentlich Punktmenge) G heißt Gerade, wenn sie durch die Vorschrift*

$$G = \{\mathbf{y} : \mathbf{y}(\lambda) = \mathbf{y}_0 + \lambda\mathbf{a}\ \forall\lambda\in\mathbf{R}\ \mathit{mit}\ \mathbf{y}_0,\mathbf{a}\in\mathbf{R}^3\}$$

definiert ist.

Definition 1.2.2 (Ebene im $\mathbf{R}^3$) *Eine Vektormenge (eigentlich Punktmenge) E heißt Ebene, wenn sie durch die Vorschrift*

$$E := \{\mathbf{x} : \mathbf{x}(\lambda,\mu) = \mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}\ \forall\lambda,\mu\in\mathbf{R}\ \mathit{mit}\ \mathbf{x}_0,\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbf{R}^3\}$$

definiert ist.

1.3 Vektoren und Funktionen im $\mathbf{R}^3$

1.3.1 Skalare Felder

Definition 1.3.1 (skalares Feld) *Eine Abbildung $\xi(\cdot) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ wird als skalares Feld oder skalare Funktion bezeichnet.*

Definition 1.3.2 (Gradient eines skalaren Feldes) *Der Gradient des skalaren Feldes $\xi(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ ist definiert durch die Vorschrift*

$$\nabla\xi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\xi(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\xi(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial}{\partial x_3}\xi(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \qquad \mathit{mit}\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

1.3.2 Vektorfunktion von einem Parameter

Definition 1.3.3 (Vektorfunktion von einem Parameter) *Eine Abbildung* $\mathbf{y}(\cdot) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$$

wird als Vektorfunktion eines Parameters t bezeichnet.

Bemerkung: Gebräuchlich ist auch die Schreibweise

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^{3} y_i(t)\mathbf{e}_i.$$

Vektorfunktionen von einem Parameter werden unter bestimmten Bedingungen als Kurven im Raum $\mathbf{R}^3$ bezeichnet.

Definition 1.3.4 (Ableitung einer Vektorfunktion eines Parameters) *Die Ableitung der Vektorfunktion $\mathbf{y}(t) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ nach dem Parameter t ist definiert durch die Vorschrift*

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}y_1(t) \\ \frac{d}{dt}y_2(t) \\ \frac{d}{dt}y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \dot{y}_3(t) \end{pmatrix}.$$

Folgerung: Für zwei beliebige Vektorfunktionen $\mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t)$ gilt in Analogie zur Produktregel bzgl. reeller Funktionen die Produktregel für das Skalar- und das Kreuzprodukt

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t)) = (\dot{\mathbf{y}}_1(t), \mathbf{y}_2(t)) + (\mathbf{y}_1(t), \dot{\mathbf{y}}_2(t)), \tag{1.3-1}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{y}_1(t) \times \mathbf{y}_2(t)) = \dot{\mathbf{y}}_1(t) \times \mathbf{y}_2(t) + \mathbf{y}_1(t) \times \dot{\mathbf{y}}_2(t)).$$

Lemma 1.3.1 (Ableitungsorthogonalität von Vektorfunktionen auf einer Kugel) *Es gelte für eine Vektorfunktion $|\mathbf{y}(t)| = c = const\ \forall t \in \mathbf{T}$, so folgt $\dot{\mathbf{y}}(t) \perp \mathbf{y}(t)\ \forall t \in \mathbf{T}$. Diese Vektorfunktion befindet sich auf einer Kugeloberfläche.*

Beweis:

$$\begin{aligned} |\mathbf{y}(t)| = 1 \quad &\Rightarrow \quad (\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t)) = 1 \\ &\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t)) = 2(\dot{\mathbf{y}}(t), \mathbf{y}(t)) = 0 \qquad \text{(aus (1.3-1))} \\ &\Rightarrow \quad \dot{\mathbf{y}}(t) \perp \mathbf{y}(t)\ \forall t \in \mathbf{T} \end{aligned}$$

1.3.3 Vektorfunktionen von zwei Parametern

Definition 1.3.5 (Vektorfunktion von zwei Parametern) *Eine Abbildung* $\mathbf{x}(\cdot,\cdot) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$

$$\mathbf{x}(t_1,t_2) = \begin{pmatrix} x_1(t_1,t_2) \\ x_2(t_1,t_2) \\ x_3(t_1,t_2) \end{pmatrix}$$

wird als Vektorfunktion zweier Parameter t_1, t_2 *bezeichnet.*

Bemerkung: Gebräuchlich ist auch die Schreibweise

$$\mathbf{x}(t_1,t_2) = \sum_{i=1}^{3} x_i(t_1,t_2)\mathbf{e}_i.$$

Vektorfunktionen von zwei Parametern werden als Flächen im Raum $\mathbf{R}^3$ bezeichnet.

Definition 1.3.6 (partielle Ableitung einer Vektorfunktion zweier Parameter) *Die partiellen Ableitungen der Vektorfunktion* $\mathbf{x}(t_1,t_2) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *nach den Parametern* t_1, t_2 *sind definiert durch die Vorschrift*

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\mathbf{x}(t_1,t_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t_i} x_1(t_1,t_2) \\ \frac{\partial}{\partial t_i} x_2(t_1,t_2) \\ \frac{\partial}{\partial t_i} x_3(t_1,t_2) \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Die Matrix

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial x_i}{\partial t_j}\right)_{ij} \qquad i = 1,2,3,\ j = 1,2$$

der partiellen Ableitungen wird als Jacobimatrix bezeichnet.

1.3.4 Vektorfunktion von drei Parametern (Vektorfelder)

Definition 1.3.7 (Vektorfunktion von drei Parametern) *Eine Abbildung* $\mathbf{z}(\cdot,\cdot,\cdot) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$

$$\mathbf{z}(t_1,t_2,t_3) = \begin{pmatrix} z_1(t_1,t_2,t_3) \\ z_2(t_1,t_2,t_3) \\ z_3(t_1,t_2,t_3) \end{pmatrix}$$

wird als Vektorfunktion dreier Parameter t_1, t_2, t_3 *oder als Vektorfeld bezeichnet.*

Bemerkung: Gebräuchlich ist auch die Schreibweise

$$\mathbf{z}(t_1,t_2,t_3) = \sum_{i=1}^{3} z_i(t_1,t_2,t_3)\mathbf{e}_i.$$

Definition 1.3.8 (Ableitung einer Vektorfunktion dreier Parameter) *Die partiellen Ableitungen der Vektorfunktion $\mathbf{z}(t_1, t_2, t_3) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ nach den Parameter t_1, t_2, t_3 sind definiert durch die Vorschrift*

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\mathbf{z}(t_1, t_2, t_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t_i} z_1(t_1, t_2, t_3) \\ \frac{\partial}{\partial t_i} z_2(t_1, t_2, t_3) \\ \frac{\partial}{\partial t_i} z_3(t_1, t_2, t_3) \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Die Matrix

$$\mathbf{J}(\mathbf{z}) = \left(\frac{\partial z_i}{\partial t_j}\right)_{ij} \qquad i, j = 1, 2, 3$$

der partiellen Ableitungen einer Vektorfunktion dreier Parameter wird als Jacobimatrix bezeichnet.

Kapitel 2

Kurventheorie

2.1 Parameterdarstellung

Definition 2.1.1 (Kurve) *Eine Kurve im Raum ist eine eindimensionale Manigfaltigkeit*

$$\Gamma = \{\mathbf{y} \ : \ \mathbf{y} = \mathbf{y}(t), \ \forall t \in \mathbf{T} \subset \mathbf{R}\} \quad \textit{mit} \quad \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$$

wobei y_i $i = 1, 2, 3$ Funktionen einer Veränderlichen t sind.

Definition 2.1.2 (zulässige Parameterdarstellung einer Kurve) $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$, $t \in \mathbf{T} \subset \mathbf{R}$ *heißt (zulässige) Parameterdarstellung einer Kurve (eines Kurvenstückes)*

$$\Gamma = \{\mathbf{y} \ : \ \mathbf{y} = \mathbf{y}(t), \ \forall t \in \mathbf{T} \subset \mathbf{R}\}$$

(der Klasse r) wenn:

- $y_i(t)$ *r-mal (meist ist $r \in \{1, 2, 3\}$) stetig differenzierbar (d.h. $y_i(t) \in \mathbf{C}^r(\mathbf{T})$) und*
- $\dot{\mathbf{y}}(t) \neq 0$, $\forall t \in \mathbf{T}$ *gilt.*

Beispiel: Gerade

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + t\mathbf{a}, \qquad t \in (-\infty, \infty), \ \mathbf{a} \neq 0$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{a} \neq 0 \ \forall t \in (-\infty, \infty) \ \Rightarrow \ \text{zulässige Parameterdarstellung}$$

■

Beispiel: Kreis mit Radius r um Mittelpunkt $\mathbf{x}_0$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}_0 + r \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 2\pi)$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = r \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \ \forall t \in [0, 2\pi) \ \Rightarrow \ \begin{array}{l} \text{zulässige Parameterdarstellung eines} \\ \text{Kreises parallel zur } y_1, y_2 - \text{Ebene} \end{array}$$

■

Beispiel: Schraubenlinie

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \\ ht \end{pmatrix}, \qquad t \in (-\infty, \infty),\ r > 0,\ h \neq 0$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \\ h \end{pmatrix} \neq 0\ \forall t \in (-\infty, \infty)\ \Rightarrow \text{zulässige Parameterdarstellung}$$

■

Parameterdarstellungen einer Kurve sind nicht eindeutig. Z.B. kann man in den obigen Beispielen t durch $t + \tau$ ersetzen, ohne daß sich die Gestalt der Kurve ändert. D.h. eine Parametertransformation ist möglich.

Betrachtung: Parametertransformation Es sei eine Kurve durch die zulässige Parameterdarstellung $\mathbf{y}(t),\ t \in [a,b]$ gegeben. Wir betrachten die Funktion $t = t(\tau),\ \tau \in [\alpha, \beta]$ mit $t(\alpha) = a,\ t(\beta) = b,\ t(\tau) \in [a,b]$. Sei $t(\tau) \in [a,b]$ wieder r-mal stetig differenzierbar, so kann man die folgende Parametertransformation durchführen.

$$\tilde{\mathbf{y}}(\tau) = \mathbf{y}(t(\tau)) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{d\tau}\tilde{\mathbf{y}}(\tau) = \frac{d}{dt}\mathbf{y}(t)\ \frac{d}{d\tau}t(\tau)$$

Da $\mathbf{y}(t)$ eine zulässige Parameterdarstellung ist, gilt $\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) \neq 0\ \forall t \in [a,b]$. Die Parameterdarstellung $\tilde{\mathbf{y}}(\tau)$ ist demzufolge genau dann zulässig, wenn $\frac{d}{d\tau}t(\tau) \neq 0\ \forall \tau \in [\alpha, \beta]$. ■

2.2 Bogenlänge

Betrachtung: Wir betrachten die Kurve $\Gamma = \{\mathbf{y}\ :\ \mathbf{y} = \mathbf{y}(t),\ \forall t \in [a,b] \subset \mathbf{R}\}$ und diskretisieren $[a,b]$ durch $\gamma_h = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$. Für die Länge l_i der Geradenstücken $\mathbf{y}(t_{i-1})$ bis $\mathbf{y}(t_i),\ i = 1, ..., n$ gilt

$$l_i = |\mathbf{y}(t_i) - \mathbf{y}(t_{i-1})| = \sqrt{\sum_{j=1}^{3}(y_j(t_i) - y_j(t_{i-1}))^2}.$$

Demzufolge ist $L(\gamma_h) = \sum_{i=1}^{n} l_i$ die Näherung für die Länge der Kurve Γ. Nach dem ersten Mittelwertsatz der Differentialrechnung (siehe [Ficht1])

$$(y_j(t_i) - y_j(t_{i-1})) = \dot{y}_j(\tau_{ij})(t_i - t_{i-1}) \text{ für } (t_{i-1} \leq \tau_{ij} \leq t_i)\ \forall i = 1, ..., n,\ \forall j = 1,2,3$$

folgt für die Näherung der Länge

$$L(\gamma_h) = \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})\sqrt{\sum_{j=1}^{3}(\dot{y}_j(\tau_{ij}))^2}\ .$$

Nach dem Grenzübergang $h = \max(t_i - t_{i-1}) \to 0$ ergibt sich die Länge des Kurvenstückes aus

$$\gamma_h \to \Gamma \qquad \Rightarrow \qquad L(\gamma_h) \to L(\Gamma) = \int_a^b |\dot{\mathbf{y}}(t)|\ dt$$

falls die Funktion integrierbar ist. Es ergibt sich demnach die folgende Definition.

Definition 2.2.1 (Bogenlänge, Bogenelement) *Die Bogenlänge einer Kurve* $\Gamma = \{\mathbf{y} \ : \ \mathbf{y} = \mathbf{y}(t), \ \forall t \in T \subset \mathbf{R}\}$ *ausgehend von einem festen Punkt* $\mathbf{y}(a)$ *bis* $\mathbf{y}(t)$ *bestimmt sich durch*

$$s(t) = \int_a^t |\dot{\mathbf{y}}(\tau)| \ d\tau. \tag{2.2-1}$$

Ausgehend von dieser Definition läßt sich ein Bogenelement der Kurve Γ *definieren durch*

$$ds = |\dot{\mathbf{y}}(t)| \ dt. \tag{2.2-2}$$

Die Bestimmung der Bogenlänge ist unabhängig von der Wahl der Parameterdarstellung, d.h. invariant gegenüber Parametertransformation. $s(t)$ ist differenzierbar und monoton wachsend in t. $\dot{s}(t) = |\dot{\mathbf{y}}(t)| > 0$ bei allen zulässigen Parametrisierungen. Bei $t > a$ folgt somit $s(t) > 0$. Es existiert also stets eine eineindeutige Abbildung zwischen t und s. ■

Definition 2.2.2 (natürlicher Parameter und rektifizierbare Kurve) *Die Bogenlänge* s *einer Kurve* Γ *wird als natürlicher Parameter bezeichnet, dieser ordnet der aktuellen Länge des Kurvenstückes die aktuelle Lage im* $\mathbf{R}^3$ *zu.*
Rektifizierbare Kurven sind diejenigen, für die die Bogenlänge $s(t)$ *(2.2-1) existiert.*

Folgerung: 1) Durch die Parametertransformation $t = t(s)$ wird zur natürlichen Parametrisierung übergegangen. Da $\dot{s}(t) > 0$ $(\neq 0)$ gilt, geht eine zulässige Parametrisierung wieder in eine solche über.
2) Schon wenn $\mathbf{y}(t)$ eine zulässige Parametrisierung ist ($\dot{\mathbf{y}}(t)$ ist stetig), ist die Kurve Γ rektifizierbar.

Beispiel: Gerade

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + t\mathbf{a}, \qquad \mathbf{a} \neq 0, \ t \in [0, b]$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{a} \qquad \Rightarrow |\dot{\mathbf{y}}(t)| = |\mathbf{a}| \qquad \Rightarrow s(t) = \int_0^t |\mathbf{a}| \ d\tau = |\mathbf{a}|t \qquad \Rightarrow t(s) = s/|\mathbf{a}|$$

$$\Rightarrow \quad t = t(s) = s/|\mathbf{a}| \qquad \Rightarrow \bar{\mathbf{y}}(s) = \mathbf{y}_0 + s\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

■

Beispiel: Kreis mit Radius r um Mittelpunkt $\mathbf{y}_0$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + r\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 2\pi), \ r > 0$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = r\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow |\dot{\mathbf{y}}(t)| = r \qquad \Rightarrow s(t) = \int_0^t r \ d\tau = rt \qquad \Rightarrow t(s) = s/r$$

$$\Rightarrow \quad t = t(s) = s/r \qquad \Rightarrow \bar{\mathbf{y}}(s) = \mathbf{y}_0 + r\begin{pmatrix} \cos(s/r) \\ \sin(s/r) \\ 0 \end{pmatrix}$$

■

Beispiel: Schraubenlinie

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \\ ht \end{pmatrix}, \qquad t \in (-\infty, \infty),\ r > 0,\ h \neq 0$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \\ h \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow |\dot{\mathbf{y}}(t)| = \sqrt{r^2+h^2} \qquad \Rightarrow s(t) = \int\limits_0^t \sqrt{r^2+h^2}\, d\tau = t\sqrt{r^2+h^2}$$

$$\Rightarrow t(s) = s/\sqrt{r^2+h^2}$$

$$\Rightarrow \quad t = t(s) = s/\sqrt{r^2+h^2} \qquad \Rightarrow \bar{\mathbf{y}}(s) = \begin{pmatrix} r\cos(s/\sqrt{r^2+h^2}) \\ r\sin(s/\sqrt{r^2+h^2}) \\ (h\ s)/\sqrt{r^2+h^2} \end{pmatrix}$$

■

Bemerkung: Im weiteren wird die Differentation nach s durch $\bar{\mathbf{y}}'$ und nach t durch $\dot{\mathbf{y}}$ beschrieben.

Betrachtung:

$$\begin{aligned}
t'(s) &= \frac{dt}{ds} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1} = \frac{1}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|} \\
t''(s) &= \frac{d}{ds}\left(\frac{dt}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\frac{1}{|\dot{\mathbf{y}}|} = \frac{d}{dt}\frac{1}{|\dot{\mathbf{y}}|}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\dot{\mathbf{y}}|}\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{|\dot{\mathbf{y}}|}\right) = \frac{1}{|\dot{\mathbf{y}}|}\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{y}},\dot{\mathbf{y}})^{-1/2} = -\frac{1}{2|\dot{\mathbf{y}}|}(\dot{\mathbf{y}},\dot{\mathbf{y}})^{-3/2}\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{y}},\dot{\mathbf{y}}) \\
&\qquad \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{y}},\dot{\mathbf{y}}) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^3 \dot{y}_i\dot{y}_i\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^3 \dot{y}_i^2\right) = \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt}\dot{y}_i^2 = \sum_{i=1}^3 2\dot{y}_i\ddot{y}_i = 2\sum_{i=1}^3 \dot{y}_i\ddot{y}_i = 2(\dot{\mathbf{y}},\ddot{\mathbf{y}}) \\
&= -\frac{1}{2|\dot{\mathbf{y}}|}(\underbrace{\sqrt{(\dot{\mathbf{y}},\dot{\mathbf{y}})}}_{|\dot{\mathbf{y}}|})^{-3}\ 2(\dot{\mathbf{y}},\ddot{\mathbf{y}}) \\
&= -\frac{(\dot{\mathbf{y}},\ddot{\mathbf{y}})}{|\dot{\mathbf{y}}|^4}
\end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{y}}'(s) = \frac{d}{ds}\bar{\mathbf{y}}(s) = \frac{d}{dt}\bar{\mathbf{y}}(s(t))\frac{dt}{ds} = \frac{d}{dt}\mathbf{y}(t)\frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\mathbf{y}}(t)}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|} \tag{2.2-3}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{y}}''(s) &= \frac{d}{ds}\bar{\mathbf{y}}'(s) = \frac{d}{dt}\frac{\dot{\mathbf{y}}(t)}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|}\frac{dt}{ds} = \frac{d}{dt}\frac{\dot{\mathbf{y}}(t)}{(\dot{\mathbf{y}}(t),\dot{\mathbf{y}}(t))^{1/2}}\frac{1}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|} \\
&= [-\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{y}}(t),\dot{\mathbf{y}}(t))^{-3/2}(2\ddot{\mathbf{y}}(t),\dot{\mathbf{y}}(t))\dot{\mathbf{y}}(t) + (\dot{\mathbf{y}}(t),\dot{\mathbf{y}}(t))^{-1/2}\ddot{\mathbf{y}}(t)]\frac{1}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|} \\
&= -\frac{(\ddot{\mathbf{y}}(t),\dot{\mathbf{y}}(t))}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|^4}\dot{\mathbf{y}}(t) + \frac{1}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|^2}\ddot{\mathbf{y}}(t) = \frac{1}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|^4}(\underbrace{|\dot{\mathbf{y}}(t)|^2}_{(\dot{\mathbf{y}}(t),\dot{\mathbf{y}}(t))}\ \ddot{\mathbf{y}}(t) - (\ddot{\mathbf{y}}(t),\dot{\mathbf{y}}(t))\dot{\mathbf{y}}(t))
\end{aligned}$$

nach (1.1-1) folgt

$$= \frac{(\dot{\mathbf{y}}(t)\times\ddot{\mathbf{y}}(t))\times\dot{\mathbf{y}}(t)}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|^4} \tag{2.2-4}$$

■

Bemerkung: 1) Ist die Kurve $\Gamma = \{\mathbf{y}\ :\ \mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}}(s),\ \forall s \in \mathbf{S} \subset \mathbf{R}\}$ in Abhängigkeit des natürlichen Parameters s gegeben, so ist stets $|\bar{\mathbf{y}}'(s)| = 1$ da

$$\bar{\mathbf{y}}'(s) = \frac{d}{ds}\bar{\mathbf{y}}(s) = \frac{d}{dt}\mathbf{y}(t)\frac{dt}{ds} = \dot{\mathbf{y}}(t)t' = \frac{\dot{\mathbf{y}}(t)}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|}.$$

2) Wenn sich die Integration $s(t) = \int_a^t |\dot{\mathbf{y}}(\tau)|\, d\tau$ nicht geschlossen ausführen läßt, so ist die Funktion $s(t)$ bzw. $t(s)$ nicht wie in den obigen Beispielen angebbar, obwohl sie existiert. Trotzdem ist der Vektor $\bar{\mathbf{y}}'(s)$ bekannt, $\bar{\mathbf{y}}'(s) = \dot{\mathbf{y}}(t)/|\dot{\mathbf{y}}(t)|$, wie auch alle weiteren Ableitungen nach s.
3) $\bar{\mathbf{y}}''(s) \perp \bar{\mathbf{y}}'(s)$ da

$$(\bar{\mathbf{y}}''(s), \bar{\mathbf{y}}'(s)) = (\bar{\mathbf{y}}''(s), \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt}\frac{dt}{ds}) = \frac{dt}{ds}\frac{1}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|^4}[|\dot{\mathbf{y}}(t)|^2(\ddot{\mathbf{y}}(t), \dot{\mathbf{y}}(t)) - (\ddot{\mathbf{y}}(t), \dot{\mathbf{y}}(t))(\dot{\mathbf{y}}(t), \dot{\mathbf{y}}(t))] = 0 \qquad (2.2\text{-}5)$$

Beispiel: Ellipse

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \ \dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin(t) \\ b\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ddot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} -a\cos(t) \\ -b\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \ a > b$$

$$|\dot{\mathbf{y}}(t)| = \sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)} = \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2(t)}$$

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2(\tau)}d\tau$$

$$\bar{\mathbf{y}}'(s) = \frac{1}{\sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2(t)}}\begin{pmatrix} -a\sin(t) \\ b\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{y}}''(s) = \frac{1}{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2(t)}\left(\begin{pmatrix} -a\cos(t) \\ -b\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -a\sin(t) \\ b\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}\frac{(a^2 - b^2)\sin(t)\cos(t)}{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2(t)}\right)$$

■

2.3 Das begleitende Dreibein

Betrachtung: Betrachtet man die Kurve

$$\Gamma = \{\mathbf{y} \ : \ \mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}}(s), \ \forall s \in \mathbf{S} \subset \mathbf{R}\}$$

so sind zu einem Kurvenpunkt $\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{y}}(s)$ durch die erste und zweite Ableitung der Parameterdarstellung (vergleiche (2.2-3) und (2.2-4)) zwei ausgezeichnete Vektoren durch die folgenden Vorschriften definiert.

1) $\mathbf{t}(s) = \bar{\mathbf{y}}'(s) = \frac{\dot{\mathbf{y}}(t)}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|}$ Tangentenvektor bzw. Tangentialvektor

2) $\mathbf{n}(s) = \frac{\bar{\mathbf{y}}''(s)}{|\bar{\mathbf{y}}''(s)|}$ Hauptnormalenvektor

$$= \frac{\frac{1}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|^4}(|\dot{\mathbf{y}}(t)|^2\ddot{\mathbf{y}}(t) - (\ddot{\mathbf{y}}(t), \dot{\mathbf{y}}(t))\dot{\mathbf{y}}(t))}{|\frac{1}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|^4}(|\dot{\mathbf{y}}(t)|^2\ddot{\mathbf{y}}(t) - (\ddot{\mathbf{y}}(t), \dot{\mathbf{y}}(t))\dot{\mathbf{y}}(t))|} = \frac{|\dot{\mathbf{y}}(t)|^2\ddot{\mathbf{y}}(t) - (\ddot{\mathbf{y}}(t), \dot{\mathbf{y}}(t))\dot{\mathbf{y}}(t)}{||\dot{\mathbf{y}}(t)|^2\ddot{\mathbf{y}}(t) - (\ddot{\mathbf{y}}(t), \dot{\mathbf{y}}(t))\dot{\mathbf{y}}(t)|}$$

Da die beiden Vektoren $\mathbf{t}(s)$ und $\mathbf{n}(s)$ orthogonal zueinander sind (vergleiche (2.2-5)), läßt sich leicht ein dritter hierzu orthogonaler Vektor angeben

3) $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$ Binormalenvektor.

■

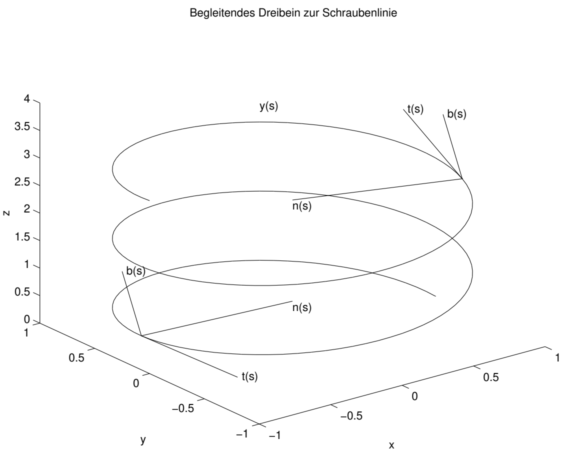
Definition 2.3.1 (Krümmung) *Die Krümmung einer Kurve bestimmt sich durch*

$$k(s) = |\bar{\mathbf{y}}''(s)| \qquad \text{in natürlicher Parametrisierung}$$

oder (vgl. mit (2.2-4)) $$k(t) = \frac{|(\dot{\mathbf{y}}(t)\times\ddot{\mathbf{y}}(t))\times\dot{\mathbf{y}}(t)|}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|^4} = \frac{|(\dot{\mathbf{y}}(t)\times\ddot{\mathbf{y}}(t))|}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|^3} \qquad \text{in freier Parametrisierung.}$$

Definition 2.3.2 (begleitendes Dreibein) *Die oben beschriebenen Vektoren* $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ *werden als begleitendes Dreibein der Kurve* $\Gamma = \{\mathbf{y} \ : \ \mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}}(s), \ s \in \mathbf{S} \subset \mathbf{R}\}$ *bezeichnet.*

Bemerkung: 1) In vielen der folgenden Grafiken, wird jeweils die y_1-, y_2- und y_3-Achse mit der x-, y- und z-Achse identifiziert.
2) Das begleitende Dreibein existiert eindeutig, wenn die Krümmung $k(s)$ nicht verschwindet.
3) Im weiteren wird der Überstrich bei der natürlichen Parametrisierung weggelassen. Ob die Parametrisierung die natürliche oder eine andere ist, erkennt man in der Abhängigkeit $\mathbf{y}(s)$ oder $\mathbf{y}(t)$ bzw. an $\mathbf{y}'(s)$ für die Ableitung nach s oder $\dot{\mathbf{y}}(t)$ nach t.



Betrachtung: Bei der Definition des begleitenden Dreibeines wurde davon ausgegangen, daß $\mathbf{y}''(s) \neq 0$ ist. Sollte jedoch $\mathbf{y}''(s) = 0$ sein, so gibt es zwei Möglichkeiten der Konstruktion dieses Vektors und somit des Dreibeines.

1. $\mathbf{y}''(s) = 0 \ \forall s \in [s_1, s_2] \Rightarrow \mathbf{y}'(s) = a = const$ z.B. bei Geraden ist somit $\mathbf{n}(s)$ und $\mathbf{b}(s)$ nicht eindeutig angebbar und kann somit unter der Bedingung $\mathbf{n} \perp \mathbf{t}$ und $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ frei gewählt werden.
2. $\mathbf{y}''(s) \neq 0 \ \forall s \neq s_0$ aber $\mathbf{y}''(s_0) = 0$. Dann sind $\mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0)$ eventuell als Grenzwert $\mathbf{n}(s_0) = \lim\limits_{s\to s_0} \mathbf{n}(s)$ bzw. $\mathbf{b}(s_0) = \lim\limits_{s\to s_0} \mathbf{b}(s)$ angebbar. Vergleiche dazu das Beispiel der Parabel 4. Ordnung auf Seite 24. ∎

Betrachtung: Geometrische Veranschaulichung der Krümmung

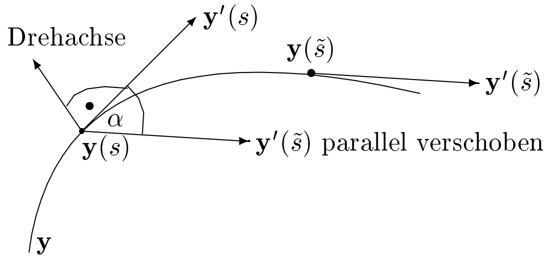
Es gilt

$$\frac{|\mathbf{y}'(\tilde{s}) - \mathbf{y}'(s)|}{\tilde{s} - s} = \frac{2\sin(\alpha/2)}{\tilde{s} - s} \approx \frac{\alpha}{\tilde{s} - s}$$

da $\tilde{s} - s$ sehr klein betrachtet wird. D.h. wenn

$$(\tilde{s} - s) \to 0 \Rightarrow \alpha \to 0.$$

$$\lim_{\tilde{s}\to s} \frac{|\mathbf{y}'(\tilde{s}) - \mathbf{y}'(s)|}{\tilde{s} - s} = |\mathbf{y}''(s)| = k(s) = \lim_{\tilde{s}\to s} \frac{\alpha}{\tilde{s} - s} = \alpha'(s)$$



$k(s)$ ist also eine Art Winkelgeschwindigkeit der Änderung des Tangentialvektors am Punkt $\mathbf{y}(s)$ um die Drehachse, welche dem Binormalenvektor $\mathbf{b}(s)$ entspricht. $\mathbf{b}(s) \perp \mathbf{t}(s) = \mathbf{y}'(s)$ und $\mathbf{y}''(s)$ bzw. $\mathbf{n}(s)$ zeigt in Richtung des Hinkrümmens der Kurve. ∎

Berechnungsformeln für $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$:

$$\mathbf{t}(s) = \frac{\dot{\mathbf{y}}(t)}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|} = \mathbf{y}'(s) \qquad \mathbf{y}'(s) \text{ und } \dot{\mathbf{y}}(t) \text{ sind kolinear}$$

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{y}''(s)}{|\mathbf{y}''(s)|} = \frac{\mathbf{t}'(s)}{|\mathbf{t}'(s)|}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{t}'(s) &= \tfrac{d}{ds}\mathbf{t}(s) = \tfrac{d}{dt}\mathbf{t}(s(t))\tfrac{dt}{ds} = \dot{\mathbf{t}}(t)\tfrac{1}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|} \qquad \text{auch } \mathbf{t}'(s) \text{ und } \dot{\mathbf{t}}(t) \text{ sind kolinear} \\
\dot{\mathbf{t}}(t) &= \tfrac{d}{dt}\tfrac{\dot{\mathbf{y}}(t)}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|} = \tfrac{\ddot{\mathbf{y}}(t)}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|} + \dot{\mathbf{y}}(t)(-\tfrac{1}{2}(\dot{\mathbf{y}}(t),\dot{\mathbf{y}}(t))^{-3/2}\, 2(\ddot{\mathbf{y}}(t),\dot{\mathbf{y}}(t))) \\
&= \tfrac{\ddot{\mathbf{y}}(t)}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|} - \tfrac{\dot{\mathbf{y}}(t)(\ddot{\mathbf{y}}(t),\dot{\mathbf{y}}(t))}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|^3} = \tfrac{1}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|^3}((\dot{\mathbf{y}}(t),\dot{\mathbf{y}}(t))\ddot{\mathbf{y}}(t) - (\ddot{\mathbf{y}}(t),\dot{\mathbf{y}}(t))\dot{\mathbf{y}}(t)) \\
&= \tfrac{(\dot{\mathbf{y}}(t)\times\ddot{\mathbf{y}}(t))\times\dot{\mathbf{y}}(t)}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|^3} \qquad \text{(siehe (1.1-1))}
\end{aligned}
$$

$$
= \quad \tfrac{\mathbf{t}'(s)}{|\mathbf{t}'(s)|} \quad = \frac{\dot{\mathbf{t}}(t)}{|\dot{\mathbf{t}}(t)|} = \frac{(\dot{\mathbf{y}}(t)\times\ddot{\mathbf{y}}(t))\times\dot{\mathbf{y}}(t)}{|(\dot{\mathbf{y}}(t)\times\ddot{\mathbf{y}}(t))\times\dot{\mathbf{y}}(t)|} = \frac{\dot{\mathbf{y}}(t)\times\ddot{\mathbf{y}}(t)}{|\dot{\mathbf{y}}(t)\times\ddot{\mathbf{y}}(t)|}\times\frac{\dot{\mathbf{y}}(t)}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|} = \frac{\dot{\mathbf{y}}(t)\times\ddot{\mathbf{y}}(t)}{|\dot{\mathbf{y}}(t)\times\ddot{\mathbf{y}}(t)|}\times\mathbf{t}(s)
$$

$\mathbf{b}(s) = \tfrac{\dot{\mathbf{y}}(t)\times\ddot{\mathbf{y}}(t)}{|\dot{\mathbf{y}}(t)\times\ddot{\mathbf{y}}(t)|}$ Da $(\mathbf{t}(s),\mathbf{n}(s),\mathbf{b}(s))$ ein Rechtssystem ist, ist auch $(\mathbf{b}(s),\mathbf{t}(s),\mathbf{n}(s))$ ein

Rechtssystem, und somit gilt $\mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s)\times\mathbf{t}(s)$ mit $\mathbf{n}(s) = \dfrac{\dot{\mathbf{y}}(t)\times\ddot{\mathbf{y}}(t)}{|\dot{\mathbf{y}}(t)\times\ddot{\mathbf{y}}(t)|}\times\mathbf{t}(s)$.

Lemma 2.3.1 (Berechnung des begleitenden Dreibeines)

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbf{t}(s) = \frac{\dot{\mathbf{y}}(t)}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|} & & \mathbf{t}(s) = \frac{\dot{\mathbf{y}}(t)}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|} \\
\mathbf{n}(s) = \frac{\dot{\mathbf{y}}(t)\times\ddot{\mathbf{y}}(t)}{|\dot{\mathbf{y}}(t)\times\ddot{\mathbf{y}}(t)|}\times\mathbf{t}(s) & \textit{oder} & \mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s)\times\mathbf{t}(s) \\
\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s)\times\mathbf{n}(s) & & \mathbf{b}(s) = \frac{\dot{\mathbf{y}}(t)\times\ddot{\mathbf{y}}(t)}{|\dot{\mathbf{y}}(t)\times\ddot{\mathbf{y}}(t)|}
\end{array}
$$

Beispiel: Gerade

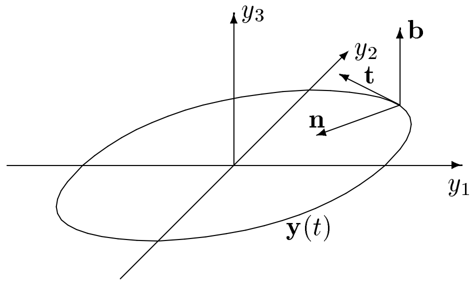
$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + t\mathbf{a} & ,\mathbf{a}\neq 0\ ,\ t\in[a,b] \\
\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{a} & |\dot{\mathbf{y}}(t)| = |\mathbf{a}| \\
\ddot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{0} & |\ddot{\mathbf{y}}(t)| = 0
\end{array}
$$

Da $\ddot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{0}\ \forall t\in[a,b]$ gilt, kann das begleitende Dreibein nicht eindeutig bestimmt werden. ■

Beispiel: Kreis mit Radius r um Mittelpunkt $\mathbf{y}_0$

$$
\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + r\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\\ 0\end{pmatrix},\quad \dot{\mathbf{y}}(t) = r\begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\\ 0\end{pmatrix},\quad \ddot{\mathbf{y}}(t) = r\begin{pmatrix}-\cos(t)\\ -\sin(t)\\ 0\end{pmatrix},\ t\in[0,2\pi]\ ,\ r>0
$$

$$
|\dot{\mathbf{y}}(t)| = r, \qquad\qquad |\ddot{\mathbf{y}}(t)| = r
$$



Tangentialvektor $\mathbf{t}$: $\mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{y}}(t)}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$

Binormalenvektor $\mathbf{b}$: $\dot{\mathbf{y}} \times \ddot{\mathbf{y}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -r\sin(t) & r\cos(t) & 0 \\ -r\cos(t) & -r\sin(t) & 0 \end{vmatrix}$

$$= r^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hauptnormalenvektor $\mathbf{n}$: $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$

■

Beispiel: Schraubenlinie

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \\ ht \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \\ h \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} -r\cos(t) \\ -r\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \in (-\infty, \infty) \ , \ r > 0 \ , \ h \neq 0$$

$$|\dot{\mathbf{y}}(t)| = \sqrt{r^2 + h^2}, \qquad |\ddot{\mathbf{y}}(t)| = r$$

Tangentialvektor $\mathbf{t}$: $\mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{y}}(t)}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|} = \frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}} \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \\ h \end{pmatrix}$

Binormalenvektor $\mathbf{b}$: $\dot{\mathbf{y}} \times \ddot{\mathbf{y}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -r\sin(t) & r\cos(t) & h \\ -r\cos(t) & -r\sin(t) & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} rh\sin(t) \\ -rh\cos(t) \\ r^2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}} \begin{pmatrix} h\sin(t) \\ -h\cos(t) \\ r \end{pmatrix}$$

Hauptnormalenvektor $\mathbf{n}$: $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ h\sin(t) & -h\cos(t) & r \\ -r\sin(t) & r\cos(t) & h \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

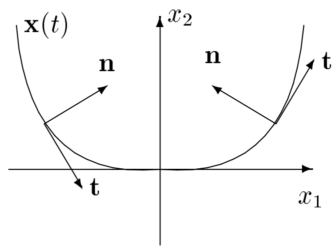
Siehe dazu die Abbildung auf Seite 22. ■

Beispiel: Parabel 4.Ordnung

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4t^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \ddot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 12t^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \in [-\infty, \infty]$$

$$|\dot{\mathbf{y}}(t)| = \sqrt{1 + 16t^6} \neq 0, \quad |\ddot{\mathbf{y}}(t)| = 12t^2 = \begin{cases} \neq 0 & \forall t \neq 0 \\ = 0 & t = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{y}'' = \frac{\ddot{\mathbf{y}}}{|\dot{\mathbf{y}}|^2} - \frac{\dot{\mathbf{y}}(\dot{\mathbf{y}},\ddot{\mathbf{y}})}{|\dot{\mathbf{y}}|^4} = \frac{12t^2}{(1+16t^6)^2}\begin{pmatrix} -4t^3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$t \to 0 \Rightarrow \mathbf{y}'' \to 0$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+16t^6}}\begin{pmatrix} -4t^3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to+0} \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \lim_{t\to-0} \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

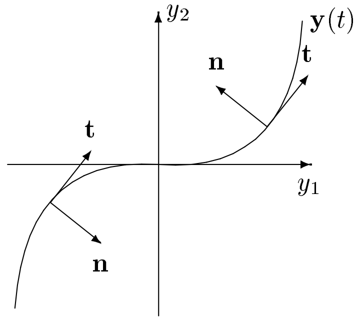
D.h. der Hauptnormalenvektor im Punkt $t = 0$ kann durch stetige Fortsetzung bzw. Grenzwertbildung eindeutig bestimmt werden. ■

Beispiel: kubische Parabel

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \ddot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6t \\ 0 \end{pmatrix}, \; t \in [-\infty, \infty]$$

$$|\dot{\mathbf{y}}(t)| = \sqrt{1+9t^4} \neq 0, \quad |\ddot{\mathbf{y}}(t)| = |6t| = \begin{cases} \neq 0 & \forall t \neq 0 \\ = 0 & t = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{y}'' = \frac{\ddot{\mathbf{y}}}{|\dot{\mathbf{y}}|^2} - \frac{\dot{\mathbf{y}}(\dot{\mathbf{y}},\ddot{\mathbf{y}})}{|\dot{\mathbf{y}}|^4} = \frac{6t}{(1+9t^4)^2}\begin{pmatrix} -3t^2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$t \to 0 \Rightarrow \mathbf{y}'' \to 0$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}\begin{pmatrix} -3t^2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\frac{t}{|t|}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to+0} \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ aber } \lim_{t\to-0} \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da der Hauptnormalenvektor seine Richtung im Punkt $t = 0$ ändert, was aus der Grafik hervorgeht, kann der Hauptnormalenvektor im Punkt $t = 0$ nicht durch stetige Fortsetzung bzw. Grenzwertbildung eindeutig bestimmt werden. ■

2.4 Die Frenetschen Formeln und der Hauptsatz der Kurventheorie

Vorbereitung: Die folgenden Größen wurden bereits in den vergangenen Abschnitten erarbeitet.

Tangentialvektor	$\mathbf{t}(s) = \mathbf{y}'(s)$	$\Rightarrow \mathbf{t}'(s) = \mathbf{y}''(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$	Krümmungsvektor
Hauptnormalenvektor	$\mathbf{n}(s) = \mathbf{t}'(s)/\lvert\mathbf{t}'(s)\rvert$		
Binormalenvektor	$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$		
Krümmung	$k(s) = \lvert\mathbf{y}''(s)\rvert = \lvert\mathbf{t}'(s)\rvert$		

Betrachtung: Wir betrachten im weiteren die Änderung des Dreibeines bzgl. des natürlichen Parameters s. Da $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ drei voneinander linear unabhängige, sogar orthonormale, Vektoren des $\mathbf{R}^3$ sind, spannen sie den gesamten $\mathbf{R}^3$ auf, so daß man sie als Basis des Raumes betrachten kann. Demzufolge kann man jeden Vektor des $\mathbf{R}^3$ als Linearkombination der Vektoren des Dreibeines darstellen, insbesondere die Ableitungen der

Vektoren selbst $\mathbf{t}'(s), \mathbf{n}'(s)$ und $\mathbf{b}'(s)$.

$$\mathbf{t}'(s) = a_{11}\mathbf{t}(s) + a_{12}\mathbf{n}(s) + a_{13}\mathbf{b}(s) \tag{2.4-1}$$
$$\mathbf{n}'(s) = a_{21}\mathbf{t}(s) + a_{22}\mathbf{n}(s) + a_{23}\mathbf{b}(s) \tag{2.4-2}$$
$$\mathbf{b}'(s) = a_{31}\mathbf{t}(s) + a_{32}\mathbf{n}(s) + a_{33}\mathbf{b}(s) \tag{2.4-3}$$

Die Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{3}$ dieser Zerlegungskoeffizienten hat folgende Eigenschaften.

1. Die Matrix $\mathbf{A}$ ist schiefsymmetrisch, d.h. $a_{ij} = -a_{ji}\ \forall i,j = 1,2,3$ insbesondere $a_{ii} = 0\ \forall i = 1,2,3$.

   Bezeichnet man $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ mit $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, so ist dies eine Orthogonalbasis und es gilt,

   $$(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0.$$

   Daraus folgt unter Beachtung der obigen Vorschrift (2.4-1)-(2.4-3)

   $$0 = \frac{d}{ds}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = (\mathbf{v}_i', \mathbf{v}_j) + (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j') = (\mathbf{v}_i', \mathbf{v}_j) + (\mathbf{v}_j', \mathbf{v}_i)$$

   $$\mathbf{v}_i' = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\mathbf{v}_k \ \Rightarrow\ (\mathbf{v}_i', \mathbf{v}_j) = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j) = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij} \tag{2.4-4}$$

   $$= a_{ij} + a_{ji} = 0$$

   $$\Rightarrow \quad a_{ij} = -a_{ji}$$

2. $-a_{21} = a_{12} = k = k(s)$ die Krümmung.

   Es gilt

   $$\mathbf{y}'' = |\mathbf{y}''|\frac{\mathbf{y}''}{|\mathbf{y}''|} \Rightarrow \mathbf{t}' = k\ \mathbf{n}$$

   nach Definition, demzufolge ist nach (2.4-1) $a_{12} = k$ und aus der Schiefsymmetrie folgt $a_{21} = -a_{12} = -k$. Andererseits folgt aus (2.4-1) $a_{13} = -a_{31} = 0$. Aus der Schiefsymmetrie folgte bereits $a_{11} = 0$.

3. Die letzte noch frei wählbare Größe der Matrix $\mathbf{A}$ ist $a_{23} = -a_{32}$ und definiert sich nach (2.4-4) durch $a_{23} = (\mathbf{v}_2', \mathbf{v}_3) = (\mathbf{n}'(s), \mathbf{b}(s))$ und wird als Windung $w = w(s)$ bezeichnet. Die Windung wird demnach wie folgt definiert und es gilt $a_{23} = -a_{32} = w$. ■

Definition 2.4.1 (Windung bzw. Torsion $w = w(s)$) *Es sei* $\mathbf{y}(t)$ *die zulässige Parameterdarstellung einer Kurve des* $\mathbf{R}^3$ *und* $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ *das zugehörige begleitende Dreibein. So wird durch*

$$w(s) = (\mathbf{n}'(s), \mathbf{b}(s))$$

die Windung definiert.

Bemerkung: Die Krümmung und Windung einer Kurve sind invariant gegenüber relationstreuer Bewegungen im Raum, d.h. Verschiebung, Verdrehung, Spiegelung u.s.w. jedoch nicht gegenüber Deformation.

Folgerung:

- Aus den obigen Betrachtungen kann man folgende Berechnungsvorschriften für die Krümmung und die Windung bzw. Torsion ableiten.

  $$k(s) = (\mathbf{t}', \mathbf{n}) = -(\mathbf{n}', \mathbf{t})$$

  $$w(s) = (\mathbf{n}', \mathbf{b}) = -(\mathbf{b}', \mathbf{n})$$

- Die Matrix der Koeffizienten hat die Gestalt

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{t}',\mathbf{t}) & (\mathbf{t}',\mathbf{n}) & (\mathbf{t}',\mathbf{b}) \\ (\mathbf{n}',\mathbf{t}) & (\mathbf{n}',\mathbf{n}) & (\mathbf{n}',\mathbf{b}) \\ (\mathbf{b}',\mathbf{t}) & (\mathbf{b}',\mathbf{n}) & (\mathbf{b}',\mathbf{b}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & w \\ 0 & -w & 0 \end{pmatrix},$$

  woraus die vorher bewiesenen Orthogonalitätseigenschaften ablesbar sind, z.B. ist $a_{13} = (\mathbf{t}', \mathbf{b}) = 0$, dies entspricht der Orthogonalität der Ableitung des Tangentialvektors $\mathbf{t}'$ zum Binormalenvektor $\mathbf{b}$. ∎

Aus den bisherigen Überlegungen folgen die Frenetschen Formeln.

Satz 2.4.1 (Frenetschen Formeln) *Für die Ableitungen der Vektoren* $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ *des begleitenden Dreibeines gelten die sogenannten Frenetschen Formeln*

$$\mathbf{t}' = k\mathbf{n}, \qquad \mathbf{n}' = -k\mathbf{t} + w\mathbf{b}, \qquad \mathbf{b}' = -w\mathbf{n}. \tag{2.4-5}$$

Satz 2.4.2 (Hauptsatz der Kurventheorie) *Gibt man im Intervall* $0 \leq s \leq a$ *zwei stetige Funktionen* $k(s) > 0$ *und* $w(s) > 0$ *vor, dann existiert, abgesehen von der räumlichen Lage, genau ein Kurvenstück* $\mathbf{y}(s)$, $0 \leq s \leq a$ *das* s *als Bogenlänge besitzt und dessen Krümmung bzw. Windung mit* $k(s)$ *bzw.* $w(s)$ *übereinstimmt. [Bronst]*

Bemerkung: 1) Die Konstruktion der Kurve erfolgt durch Lösen des linearen Differentialgleichungssystems, welches durch die Frenetschen Formeln gegeben ist. Durch Vorgabe von Anfangsbedingungen, einem Dreibein für $s = 0$, und einem Anfangspunkt $\mathbf{x}(0)$ kann eindeutig ein Kurvenstück bestimmt werden.
2) Nicht jede Kurve des $\mathbf{R}^3$ läßt durch Vorgabe der Krümmung und der Windung eindeutig festlegen. Z.B. die Kurven

$$\mathbf{y}(t) = (t, t^2, 0)^T, \qquad \tilde{\mathbf{y}}(t) = \begin{cases} (t, t^2, 0)^T & t \leq 0 \\ (t, -t^2, 0)^T & t > 0 \end{cases}$$

haben die selbe Krümmung und die selbe Windung, wobei $\tilde{y}$ nicht von Klasse $r = 3$ ist (siehe Def. 2.1.2).

Betrachtung: Ist eine Kurve durch die Parameterdarstellung $\mathbf{y}(t)$ gegeben, also in Abhängigkeit eines beliebigen Parameters t, so ist das begleitende Dreibein $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ nach den in Lemma 2.3.1 angegebenen Vorschriften berechenbar. Daraus gehen Berechnungsvorschriften der Krümmung $k(s)$ und der Windung $w(s)$ als Funktionen von t hervor. Für die Größen in Abhängigkeit von s gilt vorerst:

$$\mathbf{t} = \mathbf{y}', \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{y}''}{|\mathbf{y}''|}, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$$

$$\begin{aligned}
k(s) = {} & |\mathbf{y}''| \\
w(s) = {} & (\mathbf{n}', \mathbf{b}) = (\tfrac{d}{ds}\tfrac{\mathbf{y}''}{|\mathbf{y}''|}, \mathbf{t} \times \mathbf{n}) \\
& \tfrac{d}{ds}\tfrac{\mathbf{y}''}{|\mathbf{y}''|} = \tfrac{1}{|\mathbf{y}''|}\tfrac{d}{ds}\mathbf{y}'' + \mathbf{y}''\tfrac{d}{ds}\tfrac{1}{|\mathbf{y}''|} = \tfrac{\mathbf{y}'''}{|\mathbf{y}''|} + \mathbf{y}''(-\tfrac{1}{2}(\mathbf{y}'', \mathbf{y}'')^{3/2} * 2(\mathbf{y}'', \mathbf{y}''')) = \tfrac{\mathbf{y}'''}{|\mathbf{y}''|} - \tfrac{\mathbf{y}''(\mathbf{y}'', \mathbf{y}''')}{|\mathbf{y}'''|} \\
= {} & [\mathbf{t}, \mathbf{n}, \tfrac{\mathbf{y}'''}{|\mathbf{y}''|}] - \underbrace{[\mathbf{t}, \mathbf{n}, \frac{\mathbf{y}''(\mathbf{y}'', \mathbf{y}''')}{|\mathbf{y}'''|}]}_{=0} = [\mathbf{t}, \mathbf{n}, \tfrac{\mathbf{y}'''}{|\mathbf{y}''|}] = \tfrac{[\mathbf{y}', \mathbf{y}'', \mathbf{y}''']}{|\mathbf{y}''|^2}
\end{aligned}$$

Ausgehend davon soll nun die Krümmung und die Windung in Abhängigkeit eines beliebigen Parameters t dargestellt bzw. berechenbar werden.

1. Krümmung:

$$k(s) = |\mathbf{y}''|$$

$$\text{nach (2.2-4) gilt } \mathbf{y}'' = \frac{(\dot{\mathbf{y}}\times\ddot{\mathbf{y}})\times(\dot{\mathbf{y}})}{|\dot{\mathbf{y}}|^4}$$

$$(\dot{\mathbf{y}} \times \ddot{\mathbf{y}}) \perp \dot{\mathbf{y}} \Rightarrow \sin(\sphericalangle(\dot{\mathbf{y}} \times \ddot{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{y}})) = 1 \text{ demnach folgt aus Folgerung auf Seite 11}$$

$$|\mathbf{y}''| = \frac{|\dot{\mathbf{y}}\times\ddot{\mathbf{y}}|\;|\dot{\mathbf{y}}|}{|\dot{\mathbf{y}}|^4}$$

$$k(s) = \frac{|\dot{\mathbf{y}} \times \ddot{\mathbf{y}}|}{|\dot{\mathbf{y}}|^3}$$

2. Windung:

$$w(s) = (\mathbf{b}, \mathbf{n}') = -(\mathbf{n}, \mathbf{b}') \text{ mit } \mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t},\ \mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{y}}}{|\dot{\mathbf{y}}|},\ \mathbf{b} = \frac{\dot{\mathbf{y}}\times\ddot{\mathbf{y}}}{|\dot{\mathbf{y}}\times\ddot{\mathbf{y}}|}$$

$$\text{Berechnung von } \mathbf{b}' :\ \mathbf{b}' = \frac{d}{ds}\mathbf{b} = \frac{d}{dt}\mathbf{b}\frac{dt}{ds} = \frac{d}{dt}\frac{\dot{\mathbf{y}}\times\ddot{\mathbf{y}}}{|\dot{\mathbf{y}}\times\ddot{\mathbf{y}}|}\frac{1}{|\dot{\mathbf{y}}|}\mathbf{b}' = -\frac{1}{|\dot{\mathbf{y}}|}\frac{[\ddot{\mathbf{y}},\dot{\mathbf{y}},\dddot{\mathbf{y}}](\dot{\mathbf{y}}\times(\dot{\mathbf{y}}\times\ddot{\mathbf{y}}))}{|\dot{\mathbf{y}}\times\ddot{\mathbf{y}}|^3}$$

$$\text{Nebenrechnung: } \frac{d}{dt}\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\dot{\mathbf{a}}}{|\mathbf{a}|} + \mathbf{a}(-\frac{1}{|\mathbf{a}|^3}[\mathbf{a}(\dot{\mathbf{a}}, \mathbf{a})] = \frac{1}{|\mathbf{a}|^3}(\dot{\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) - \mathbf{a}(\dot{\mathbf{a}}, \mathbf{a})) = \frac{(\mathbf{a}\times\dot{\mathbf{a}})\times\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^3}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{\mathbf{y}}\times\ddot{\mathbf{y}}}{|\dot{\mathbf{y}}\times\ddot{\mathbf{y}}|} = \frac{(\dot{\mathbf{y}}\times\ddot{\mathbf{y}})\times[\overbrace{(\ddot{\mathbf{y}} \times \ddot{\mathbf{y}})}^{=0}+(\dot{\mathbf{y}}\times\dddot{\mathbf{y}})])\times(\dot{\mathbf{y}}\times\ddot{\mathbf{y}})}{|\dot{\mathbf{y}}\times\ddot{\mathbf{y}}|^3} = \frac{([\dot{\mathbf{y}},\dot{\mathbf{y}},\ddot{\mathbf{y}}]\ddot{\mathbf{y}}-[(\ddot{\mathbf{y}},\dot{\mathbf{y}},\dddot{\mathbf{y}}]\dot{\mathbf{y}})\times(\dot{\mathbf{y}}\times\ddot{\mathbf{y}})}{|\dot{\mathbf{y}}\times\ddot{\mathbf{y}}|^3} = -\frac{[\ddot{\mathbf{y}},\dot{\mathbf{y}},\dddot{\mathbf{y}}](\dot{\mathbf{y}}\times(\dot{\mathbf{y}}\times\ddot{\mathbf{y}}))}{|\dot{\mathbf{y}}\times\ddot{\mathbf{y}}|^3}$$

$$w(s) = (\mathbf{b}, \mathbf{n}') = -(\mathbf{n}, \mathbf{b}') = \frac{[\ddot{\mathbf{y}},\dot{\mathbf{y}},\dddot{\mathbf{y}}]}{|\dot{\mathbf{y}}|\;|\dot{\mathbf{y}}\times\ddot{\mathbf{y}}|3}\frac{(\dot{\mathbf{y}}\times\ddot{\mathbf{y}})\times\dot{\mathbf{y}}}{|\dot{\mathbf{y}}\times\ddot{\mathbf{y}}|\;|\dot{\mathbf{y}}|}\overbrace{(\dot{\mathbf{y}} \times (\dot{\mathbf{y}} \times \ddot{\mathbf{y}}))}^{=-(\dot{\mathbf{y}}\times\ddot{\mathbf{y}})\times\dot{\mathbf{y}}} = -\frac{[\ddot{\mathbf{y}},\dot{\mathbf{y}},\dddot{\mathbf{y}}]\;|\dot{\mathbf{y}}\times\ddot{\mathbf{y}}|^2|\dot{\mathbf{y}}|^2}{|\dot{\mathbf{y}}|\;|\dot{\mathbf{y}}\times\ddot{\mathbf{y}}|^4|\dot{\mathbf{y}}|}$$

$$= \frac{[\dot{\mathbf{y}},\ddot{\mathbf{y}},\dddot{\mathbf{y}}]}{|\dot{\mathbf{y}}\times\ddot{\mathbf{y}}|^2}$$

Lemma 2.4.1 (Krümmung und Windung in Abhängigkeit des freien Parameters t)

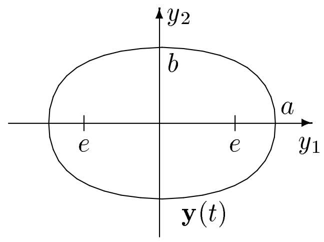
$$k(s) = \frac{|\dot{\mathbf{y}} \times \ddot{\mathbf{y}}|}{|\dot{\mathbf{y}}|^3}, \qquad w(s) = \frac{[\dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \dddot{\mathbf{y}}]}{|\dot{\mathbf{y}} \times \ddot{\mathbf{y}}|^2}$$

Beispiel: Ellipse im Scheitelpunkt

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \\ c \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin(t) \\ b\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} -a\cos(t) \\ -b\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dddot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} a\sin(t) \\ -b\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{y}} \times \ddot{\mathbf{y}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\sin(t) & b\cos(t) & 0 \\ -a\cos(t) & -b\sin(t) & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}\ ab = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ab \end{pmatrix}$$

$$a^2 = e^2 + b^2 \;\Rightarrow\; e^2 = a^2 - b^2$$



$$\begin{aligned}
k(s) &= \frac{|\dot{\mathbf{y}} \times \ddot{\mathbf{y}}|}{|\dot{\mathbf{y}}|^3} = \frac{ab}{\sqrt{(a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t))^3}} \\
&= \frac{ab}{\sqrt{(a^2\sin^2(t) + (a^2 - e^2)\cos^2(t))^3}} \\
&= \frac{ab}{\sqrt{(a^2\sin^2(t) + (a^2 - e^2)(1 - \sin^2(t)))^3}} \\
&= \frac{ab}{\sqrt{(a^2\sin^2(t) + a^2 - a^2\sin^2(t) - e^2 + e^2\sin^2(t))^3}} = \frac{ab}{\sqrt{(b^2 + e^2\sin^2(t))^3}}
\end{aligned}$$

Es ist erkennbar, daß eine Ellipse ihre maximale Krümmung bei $t = 0$ und $t = \pi$ und ihre minimale Krümmung bei $t = \pi/2$ und $t = 3\pi/2$ hat.

$$w(s) = \frac{[\dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \dddot{\mathbf{y}}]}{|\dot{\mathbf{y}} \times \ddot{\mathbf{y}}|^2} = 0 \qquad \text{da } [\dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \dddot{\mathbf{y}}] = \begin{vmatrix} -a\sin(t) & -a\cos(t) & a\sin(t) \\ b\cos(t) & -b\sin(t) & -b\cos(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Offenbar ist die Windung Null, weil die Kurve in einer Ebene liegt. ■

Lemma 2.4.2 (Windung einer Kurve in einer Ebene) *Liegt die Kurve Γ in einer Ebene E, so ist ihre Windung w identisch Null.*

Beweis: E sei die Ebene $E = \{\mathbf{x} \;:\; \mathbf{x}(\lambda, \mu) = \mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b};\; \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}$ mit den Richtungsvektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$, die linear unabhängig sind. Definiert man etwa zwei Funktionen $\lambda(t)$ und $\mu(t)$, welche beide mindestens drei mal stetig differenzierbar sind, ergibt sich mit $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}_0 + \lambda(t)\mathbf{a} + \mu(t)\mathbf{b}$ eine Kurve $\Gamma \subset E$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{y}}(t) &= \dot\lambda(t)\mathbf{a} + \dot\mu(t)\mathbf{b} \qquad \text{ist i.a. zulässig, da } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ linear unabhängig sind} \\
\ddot{\mathbf{y}}(t) &= \ddot\lambda(t)\mathbf{a} + \ddot\mu(t)\mathbf{b} \\
\dddot{\mathbf{y}}(t) &= \dddot\lambda(t)\mathbf{a} + \dddot\mu(t)\mathbf{b}
\end{aligned}$$

$[\dot{\mathbf{y}}(t), \ddot{\mathbf{y}}(t), \dddot{\mathbf{y}}(t)]$ ist offensichtlich Null, weil alle drei Vektoren im $span(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ liegen und somit linear abhängig sind.
Da jede Kurve Γ, die in E liegt, durch geeignete Wahl von $\lambda(t), \mu(t)$ definiert werden kann, folgt daraus die Aussage.

Beispiel: Kreis

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{hat die Krümmung } k = \frac{|\dot{\mathbf{y}} \times \ddot{\mathbf{y}}|}{|\dot{\mathbf{y}}|^3} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r} = const$$

■

Beispiel: Schraubenlinie

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \\ ht \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \\ h \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} -r\cos(t) \\ -r\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dddot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} r\sin(t) \\ -r\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Krümmung:

$$|\dot{\mathbf{y}}| = \sqrt{r^2 + h^2}, \; |\dot{\mathbf{y}} \times \ddot{\mathbf{y}}| = \sqrt{r^2(r^2 + h^2)} \qquad \Rightarrow k(s) = \frac{|\dot{\mathbf{y}} \times \ddot{\mathbf{y}}|}{|\dot{\mathbf{y}}|^3} = \frac{r}{r^2 + h^2} = const < 1/r$$

2. Windung:

$$[\dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \dddot{\mathbf{y}}] = r^2 \begin{vmatrix} -\sin(t) & -\cos(t) & \sin(t) \\ \cos(t) & -\sin(t) & -\cos(t)) \\ h & 0 & 0 \end{vmatrix} = r^2 h \qquad \Rightarrow w(s) = \frac{[\dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \dddot{\mathbf{y}}]}{|\dot{\mathbf{y}} \times \ddot{\mathbf{y}}|^2} = \frac{h}{r^2 + h^2} = const$$

■

2.5 Schmiegeebene - Normalebene - Streckebene

2.5.1 Einführung

Ebenso wie das begleitende Dreibein $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ kann man im Kurvenpunkt $\mathbf{y}(s)$ drei charakteristische Ebenen definieren, die von je zwei Vektoren des begleitenden Dreibeines aufgespannt werden.

Definition 2.5.1 (Schmiegeebene) *Die von dem Tangentialvektor $\mathbf{t}(s)$ und dem Normalenvektor $\mathbf{n}(s)$ aufgespannte Ebene, die den Kurvenpunkt $\mathbf{y}(s)$ enthält, wird als Schmiegeebene bezeichnet.*

$$E_S(s) = \mathbf{y}(s) + span(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s))$$

Bemerkung: 1) Die Vektoren $\dot{\mathbf{y}}(s)$ und $\ddot{\mathbf{y}}(s)$ liegen in der Schmiegeebene, da der Binormalenvektor

$$\mathbf{b}(s) = \frac{\dot{\mathbf{y}}(t) \times \ddot{\mathbf{y}}(t)}{|\dot{\mathbf{y}}(t) \times \ddot{\mathbf{y}}(t)|}$$

senkrecht auf der Schmiegeebene steht.
2) Durch die drei Kurvenpunkte $\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t + h_1)$ und $\mathbf{y}(t + h_2)$ mit positiven h_i wird eindeutig eine Ebene $E(t, t + h_1, t + h_2)$ bestimmt, sofern diese Punkte nicht auf einer Gerade liegen. Die Krümmung $k(t)$ sei in dem Punkt $\mathbf{y}(t)$ von Null verschieden, so gilt

$$\lim_{h_i \to 0, h_1 \neq h_2} E(t, t + h_1, t + h_2) = E_S(t).$$

Definition 2.5.2 (Normalebene) *Die von dem (Haupt-)Normalenvektor $\mathbf{n}(s)$ und dem Binormalenvektor $\mathbf{b}(s)$ aufgespannte Ebene, die den Kurvenpunkt $\mathbf{y}(s)$ enthält, wird als Normalebene bezeichnet.*

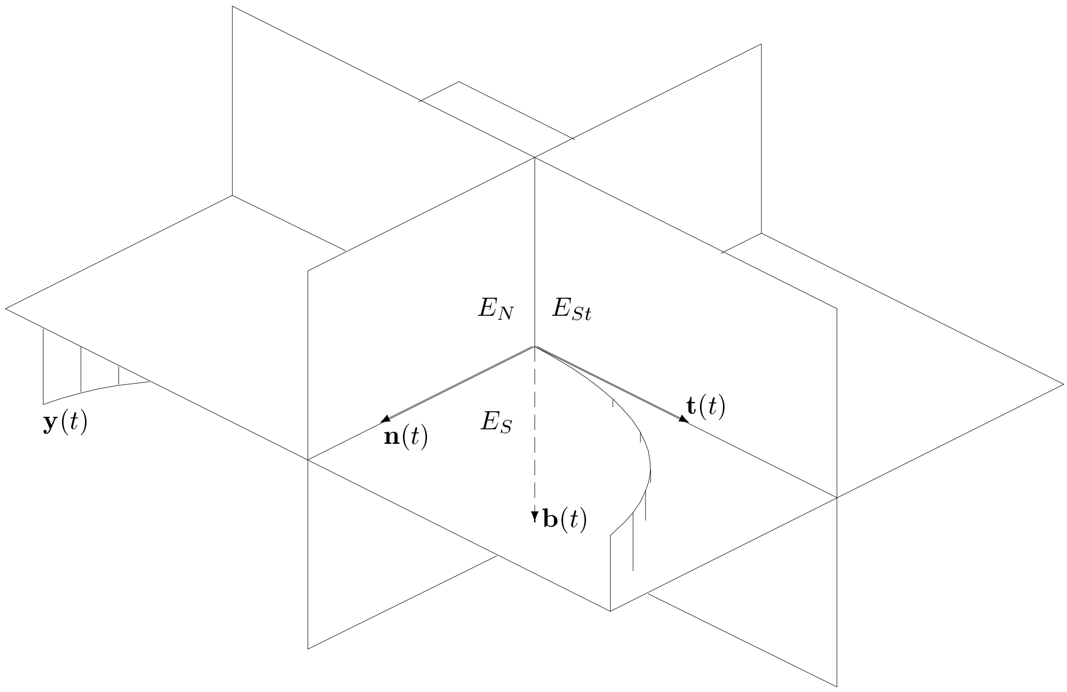
$$E_N(s) = \mathbf{y}(s) + span(\mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$$

Bemerkung: Die Normalebene $E_N(s)$ wird von der Kurve $\mathbf{y}(s)$ senkrecht durchstoßen.

Definition 2.5.3 (Streckebene) *Die von dem Tangentialvektor $\mathbf{t}(s)$ und dem Binormalenvektor $\mathbf{b}(s)$ aufgespannte Ebene, die den Kurvenpunkt $\mathbf{y}(s)$ enthält, wird als Streckebene bezeichnet.*

$$E_{St}(s) = \mathbf{y}(s) + span(\mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s))$$

Bemerkung: Im Fall einer ebenen Kurve ist die Schmiegeebene genau die Ebene in der die Kurve liegt und konstant. Die Normalebene und die Streckebene variieren mit t.



2.5.2 Projektionen in die Schmiegeebene, Normalebene und Streckebene

Betrachtung: Wir betrachten die Kurve $\mathbf{y}(s)$ bzgl. des natürlichen Parameters an der Stelle s und einen Umgebungspunkt $s+\Delta s$, d.h. $\mathbf{y}(s+\Delta s)$ mit

$$\mathbf{y}(s+\Delta s) = \mathbf{y}(s) + \mathbf{v}(s,\Delta s).$$

Im Punkt $\mathbf{y}(s)$ existiert das begleitende Dreibein $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$. Außerdem kann $\mathbf{v}(s,\Delta s)$ durch

$$\mathbf{v}(s,\Delta s) = \alpha \mathbf{t}(s) + \beta \mathbf{n}(s) + \gamma \mathbf{b}(s)$$

mittels der Funktionen $\alpha = \alpha(s,\Delta s), \beta = \beta(s,\Delta s)$ und $\gamma = \gamma(s,\Delta s)$ beschrieben werden. Nach der Taylorentwicklung gilt

$$\mathbf{y}(s+\Delta s) = \mathbf{y}(s) + \Delta s\ \mathbf{y}'(s) + \tfrac{\Delta s^2}{2!}\mathbf{y}''(s) + \tfrac{\Delta s^3}{3!}\mathbf{y}'''(s) + \mathbf{R}(s,\Delta s)$$

$$\text{mit } |\mathbf{R}(s,\Delta s)| = O(|\Delta s|^4) \ \Rightarrow\ \tfrac{|\mathbf{R}(s,\Delta s)|}{\Delta s^3} \underset{\Delta s\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Durch ersetzen von $\mathbf{y}'(s), \mathbf{y}''(s)$ und $\mathbf{y}'''(s)$ durch

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}'(s) &= \mathbf{t}(s), \\
\mathbf{y}''(s) &= \mathbf{t}'(s) && = k(s)\mathbf{n}(s), \\
\mathbf{y}'''(s) &= \tfrac{d}{ds}\mathbf{t}'(s) && = k'(s)\mathbf{n}(s) + k(s)\mathbf{n}'(s) = k'(s)\mathbf{n}(s) + k(s)(-k(s)\mathbf{t}(s) + w(s)\mathbf{b}(s)) \\
& && = -k^2(s)\mathbf{t}(s) + k'(s)\mathbf{n}(s) + k(s)w(s)\mathbf{b}(s),
\end{aligned}$$

folgt

$$\alpha = \Delta s - k^2(s)\frac{\Delta s^3}{6} + O(|\Delta s|^4) \quad ,\beta = \frac{\Delta s^2}{2}k(s) + k'(s)\frac{\Delta s^3}{6} + O(|\Delta s|^4) \quad ,\gamma = \frac{\Delta s^3}{6}k(s)w(s) + O(|\Delta s|^4).$$

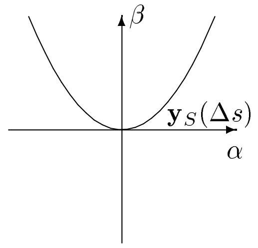
Daraus ergeben sich die charakteristischen Verläufe der Projektionen in die einzelnen Ebenen der Kurve $\mathbf{y}(s)$.

Projektion in die Schmiegeebene

Die Schmiegeebene wird durch den Tangentialvektor $\mathbf{t}(s)$ und den Hauptnormalenvektor $\mathbf{n}(s)$ aufgespannt, welche demzufolge als Basis fungieren. D.h. die Projektion $\mathbf{y}_S(\Delta s)$ der Kurve $\mathbf{y}(s)$ im Punkt s in die Schmiegeebene läßt sich durch

$$\mathbf{y}_S(\Delta s) = \alpha(s, \Delta s)\mathbf{t}(s) + \beta(s, \Delta s)\mathbf{n}(s)$$

bei festem s approximieren. Die Projektion jeder Kurve in die Schmiegeebene hat die dargestellte charakteristische Gestalt, wobei nur die Krümmung von der eigentlichen Gestalt der Kurve abhängt.



$$\begin{aligned} \alpha &= \Delta s - k^2(s)\tfrac{\Delta s^3}{6} + O(|\Delta s|^4) &&\approx \Delta s + O(|\Delta s|^3) \\ \beta &= \tfrac{\Delta s^2}{2}k(s) + k'(s)\tfrac{\Delta s^3}{6} + O(|\Delta s|^4) &&\approx \tfrac{k(s)}{2}\Delta s^2 + O(|\Delta s|^3) \end{aligned}$$

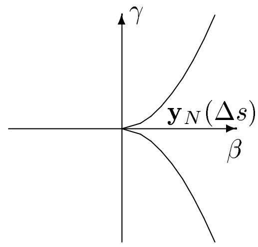
Näherungsweise gilt demnach $\beta = \dfrac{k(s)}{2}\alpha^2.$

Projektion in die Normalebene

Die Normalebene wird durch den Hauptnormalenvektor $\mathbf{n}(s)$ und den Binormalenvektor $\mathbf{b}(s)$ aufgespannt, welche demzufolge als Basis fungieren. D.h. die Projektion $\mathbf{y}_N(\Delta s)$ der Kurve $\mathbf{y}(s)$ im Punkt s in die Normalebene läßt sich durch

$$\mathbf{y}_N(\Delta s) = \beta(s, \Delta s)\mathbf{n}(s) + \gamma(s, \Delta s)\mathbf{b}(s)$$

bei festem s approximieren. Die Projektion jeder Kurve in die Normalebene hat die dargestellte charakteristische Gestalt, wobei nur die Krümmung und die Windung von der eigentlichen Gestalt der Kurve abhängt.



$$\begin{aligned} \beta &= \tfrac{\Delta s^2}{2}k(s) + k'(s)\tfrac{\Delta s^3}{6} + O(|\Delta s|^4) &&\approx \tfrac{k(s)}{2}\Delta s^2 + O(|\Delta s|^3) \\ \gamma &= \tfrac{\Delta s^3}{6}k(s)w(s) + O(|\Delta s|^4) &&\approx \tfrac{k(s)w(s)}{6}\Delta s^3 + O(|\Delta s|^4) \end{aligned}$$

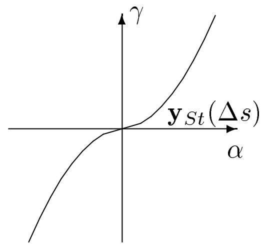
Näherungsweise gilt demnach $\beta = \dfrac{k(s)}{2}\left(\dfrac{6}{k(s)\ w(s)}\right)^{2/3}\gamma^{2/3}$ die Neitsche Parabel.

Projektion in die Streckebene

Die Streckebene wird durch den Tangentialvektor $\mathbf{t}(s)$ und den Binormalenvektor $\mathbf{b}(s)$ aufgespannt, welche demzufolge als Basis fungieren. D.h. die Projektion $\mathbf{y}_{St}(\Delta s)$ der Kurve $\mathbf{y}(s)$ im Punkt s in die Streckebene läßt sich durch

$$\mathbf{y}_{St}(\Delta s) = \alpha(s, \Delta s)\mathbf{t}(s) + \gamma(s, \Delta s)\mathbf{b}(s)$$

bei festem s approximieren. Die Projektion jeder Kurve in die Streckebene hat die dargestellte charakteristische Gestalt, wobei nur die Krümmung und die Windung von der eigentlichen Gestalt der Kurve abhängt.



$$\begin{aligned} \alpha &= \Delta s - k^2(s)\tfrac{\Delta s^3}{6} + O(|\Delta s|^4) &&\approx \Delta s + O(|\Delta s|^3) \\ \gamma &= \tfrac{\Delta s^3}{6}k(s)w(s) + O(|\Delta s|^4) &&\approx \tfrac{k(s)w(s)}{6}\Delta s^3 + O(|\Delta s|^4) \end{aligned}$$

Näherungsweise gilt demnach $\gamma = \dfrac{k(s)\ w(s)}{6}\alpha^3$

2.6 Spezielle Kurven

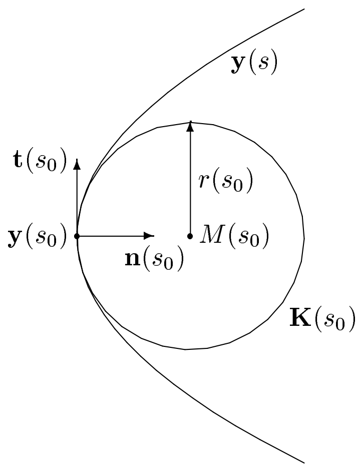
Bemerkung: Die Windung und Krümmung lassen bereits besondere Eigenschaften der zugehörigen Kurven erkennen.

1) $w(s) = 0$	und $k(s) = 0$	$\Rightarrow$ Gerade
2) $w(s) = 0$	und $k(s) = const$	$\Rightarrow$ Kreis
3) $w(s) = 0$	und $k(s)$ *bel.*	$\Rightarrow$ ebene Kurven
4) $w(s) = const$	und $k(s) = const$	$\Rightarrow$ Schraubenlinie

2.6.1 Evoluten, Evolventen und der Krümmungsmittelpunkt

Die Kurve Γ hat im Punkt s_0 das begleitende Dreibein $(\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0))$. Gesucht sei ein Kreis $\mathbf{K}(s_0)$ mit dem Mittelpunkt $\mathbf{M}(s_0)$ in der Schmiegeebene $E_S(s_0)$

$$\mathbf{M}(s_0) = \mathbf{y}(s_0) + r(s_0 \mathbf{n}(s_0)$$



und dem Radius $r(s_0)$. Dieser Kreis soll die Kurve Γ in einer Umgebung von $\mathbf{y}(s_0)$ gut annähern. Es soll demnach der Mittelpunkt $\mathbf{M}(s_0)$ und der Radius $r(s_0)$ so gewählt werden, daß der Kreis die Kurve im Punkt $\mathbf{y}(s_0)$ tangiert und dieselbe Krümmung hat. Da die Krümmung eines Kreises aus dem Radius hervorgeht,

$$k(s_0) = 1/r(s_0) \;\;\Rightarrow\;\; r(s_0) = 1/k(s_0)$$

folgt, daß der Kreis die folgende Gestalt hat.

$$\mathbf{K}(s_0) = \{\mathbf{y}(\varphi) \;:\; \mathbf{y}(\varphi) = \underbrace{\mathbf{y}(s_0) + \mathbf{n}(s_0)/k(s_0)}_{\mathbf{M}(s_0)} + \frac{1}{k(s_0)}\cos(\varphi)\mathbf{t}(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}\sin(\varphi)\mathbf{n}(s_0),\;\; \varphi \in [0, 2\pi)\}$$

Betrachtet man den Verlauf der Kreismittelpunkte in Abhängigkeit von $s = s_0$

$$\mathbf{m}(s) = \mathbf{y}(s) + \frac{\mathbf{n}(s)}{k(s)}$$

so ergibt sich eine für die Kurve $\mathbf{y}(s)$ charakteristische Kurve, die Evolute.

Definition 2.6.1 (Evolute) *Die Kurve*

$$\Gamma_m = \{\mathbf{m}(s) \;:\; \mathbf{m}(s) = \mathbf{y}(s) + \frac{\mathbf{y}''(s)}{|\mathbf{y}''(s)|^2}\} \qquad \textit{heißt Evolute zur Kurve } \Gamma.$$

Nun stellt sich die Frage, wie die Evolute zu bestimmen ist, wenn die zugehörige Kurve nicht in der natürlichen Parameterdarstellung gegeben ist, das heißt bezüglich eines freien Parameters t. Da jedoch nach (2.2-4)

$$\mathbf{y}''(s) = \frac{(\dot{\mathbf{y}}(t) \times \ddot{\mathbf{y}}(t)) \times \dot{\mathbf{y}}(t)}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|^4}$$

gilt, folgt

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}(t) &= \mathbf{y}(t) + \frac{((\dot{\mathbf{y}}(t) \times \ddot{\mathbf{y}}(t)) \times \dot{\mathbf{y}}(t))/(|\dot{\mathbf{y}}(t)|^4)}{|((\dot{\mathbf{y}}(t) \times \ddot{\mathbf{y}}(t)) \times \dot{\mathbf{y}}(t))/(|\dot{\mathbf{y}}(t)|^4)|^2} \\
&= \mathbf{y}(t) + \frac{((\dot{\mathbf{y}}(t) \times \ddot{\mathbf{y}}(t)) \times \dot{\mathbf{y}}(t))/|\dot{\mathbf{y}}(t)|^4}{|(\dot{\mathbf{y}}(t) \times \ddot{\mathbf{y}}(t)) \times \dot{\mathbf{y}}(t)|^2/|\dot{\mathbf{y}}(t)|^8} \\
&= \mathbf{y}(t) + \frac{|\dot{\mathbf{y}}(t)|^2}{|\dot{\mathbf{y}}(t) \times \ddot{\mathbf{y}}(t)|^2}(\dot{\mathbf{y}}(t) \times \ddot{\mathbf{y}}(t)) \times \dot{\mathbf{y}}(t).
\end{aligned}$$

Lemma 2.6.1 (Evolute in freien Parametern t) *Die Evolute Γ_m der Kurve Γ läßt sich bzgl. des freien Parameters t in der Form*

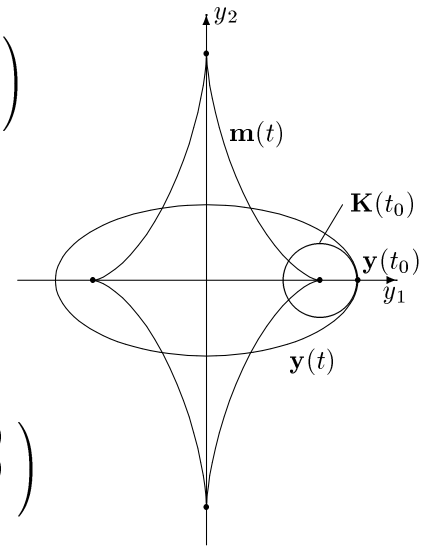
$$\Gamma_m = \{\mathbf{m}(t) \ : \ \mathbf{m}(t) = \mathbf{y}(t) + \frac{|\dot{\mathbf{y}}(t)|^2}{|\dot{\mathbf{y}}(t) \times \ddot{\mathbf{y}}(t)|^2}(\dot{\mathbf{y}}(t) \times \ddot{\mathbf{y}}(t)) \times \dot{\mathbf{y}}(t)\}$$

berechnen. Durch Ausformulierung der Kreuzprodukte gelangt man auch zu der Darstellung

$$\Gamma_m := \{\mathbf{m}(t) \ : \ \mathbf{m}(t) = \mathbf{y}(t) + |\dot{\mathbf{y}}(t)|^2 \frac{\ddot{\mathbf{y}}(t)|\dot{\mathbf{y}}(t)|^2 - \dot{\mathbf{y}}(t)(\dot{\mathbf{y}}(t), \ddot{\mathbf{y}}(t))}{|\ddot{\mathbf{y}}(t)|^2|\dot{\mathbf{y}}(t)|^2 - (\dot{\mathbf{y}}(t), \ddot{\mathbf{y}}(t))^2}\}.$$

Beispiel: Ellipse

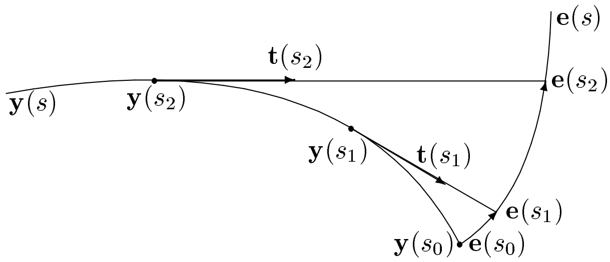
$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \\ c \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin(t) \\ b\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} -a\cos(t) \\ -b\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{y}} \times \ddot{\mathbf{y}} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\sin(t) & b\cos(t) & 0 \\ -a\cos(t) & -b\sin(t) & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}\ a\ b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ab \end{pmatrix} \\
(\dot{\mathbf{y}} \times \ddot{\mathbf{y}}) \times \dot{\mathbf{y}} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -a\sin(t) & b\cos(t) & 0 \end{vmatrix} a\ b = a\ b \begin{pmatrix} -b\cos(t) \\ -a\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \mathbf{m}(t) &= \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \\ c \end{pmatrix} + \frac{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}{(a\ b)^2} a\ b \begin{pmatrix} -b\cos(t) \\ -a\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(t)(a - a\sin^2(t) - (b^2/a)\cos^2(t)) \\ \sin(t)(b - (a^2/b)\sin^2(t) - b\cos^2(t)) \\ c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^3(t)(a - (b^2/a)) \\ \sin^3(t)(b - (a^2/b)) \\ c \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

■

Wie aus der obigen Betrachtung hervorging, bezeichnet man den geometrischen Ort aller Krümmungsmittelpunkte als Evolute. Die Evolute Γ_m ist eine charakteristische Kurve für die Kurve Γ. Eine weitere charakteristische Kurve ist die Evolvente.



Definition 2.6.2 (Evolvente) *Als Evolvente Γ_e der Kurve Γ wird die Abwickelkurve eines auf Γ aufgewickelten Fadens, der stets tangential gehalten wird, bezeichnet. Daraus ergibt sich die Berechnungsvorschrift*

$$\Gamma_e := \{\mathbf{e}(s) \ : \ \mathbf{e}(s) = \mathbf{y}(s) - (s - s_0)\mathbf{t}(s)\}.$$

Bemerkung: 1) Die Bogenlänge wird durch $s - s_0$ wiedergegeben, da s der natürliche Parameter ist.

2) Durch Variation von s_0 wird eine Schar von Evolventen erzeugt.
3) Für die Evolvente stellt s nicht mehr den natürlichen Parameter dar.

Satz 2.6.1 (Evolvente ebener Kurven) *Bei ebenen Kurven Γ ist Γ die Evolute ihrer Evolvente.*

Beweis: Die Kurve Γ ist durch die natürliche Parameterdarstellung $\mathbf{y}(s)$ definiert. Sie besitzt das begleitende Dreibein $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$, die Krümmung $k(s)$ und die Windung $w(s)$. Wir betrachten die Evolvente

$$\Gamma_e := \{\mathbf{e}(s) \ : \ \mathbf{e}(s) = \mathbf{y}(s) - s\mathbf{t}(s)\} \text{ für } s_0 = 0.$$

Für die Evolvente stellt s nicht mehr den natürlichen Parameter dar. Die Evolute dieser Evolvente kann durch

$$\Gamma_m := \{\mathbf{m}(s) \ : \ \mathbf{m}(s) = \mathbf{e}(s) + |\dot{\mathbf{e}}(s)|^2 \frac{\ddot{\mathbf{e}}(s)|\dot{\mathbf{e}}(s)|^2 - \dot{\mathbf{e}}(s)(\dot{\mathbf{e}}(s), \ddot{\mathbf{e}}(s))}{|\ddot{\mathbf{e}}(s)|^2|\dot{\mathbf{e}}(s)|^2 - (\dot{\mathbf{e}}(s), \ddot{\mathbf{e}}(s))^2}\}$$

dargestellt werden, wobei $\dot{\mathbf{e}}(s) = \frac{d\mathbf{e}(s)}{ds}$, da s nicht der Natürliche Parameter der Evolvente ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{e}}(s) &= \mathbf{y}'(s) - \mathbf{t}(s) - s\mathbf{t}'(s) = -s\mathbf{t}'(s) = -s\ k(s)\ \mathbf{n}(s) \\
\ddot{\mathbf{e}}(s) &= -k(s)\mathbf{n}(s) - s\ k'(s)\mathbf{n}(s) - s\ k(s)\mathbf{n}'(s) \\
&= -(k(s) + s\ k'(s))\mathbf{n}(s) - s\ k(s)(-k(s)\mathbf{t}(s) + \underbrace{w(s)}_{=0}\mathbf{b}(s)) \\
&= -(k(s) + s\ k'(s))\mathbf{n}(s) + s\ k^2(s)\mathbf{t}(s) \\
|\dot{\mathbf{e}}(s)|^2 &= s^2k^2(s) \\
|\ddot{\mathbf{e}}(s)|^2 &= (k(s) + s\ k'(s))^2 + s^2k^2(s) \\
(\dot{\mathbf{e}}(s), \ddot{\mathbf{e}}(s)) &= s\ k(s)(k(s) + s\ k'(s))
\end{aligned}$$

Nach Einsetzen in die Vorschrift der Evolute $m(s)$ folgt

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}(s) &= \mathbf{y}(s) - s\mathbf{t}(s) + s^2k^2(s)\left[\frac{-s^2k^2(s)(k(s) + s\ k'(s))\mathbf{n}(s) + s^2k^2(s)s\ k^2(s)\mathbf{t}(s)}{s^4k^6}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{s\ k(s)\mathbf{n}(s)(s\ k(s)(k(s) + s\ k'(s)))}{s^4k^6}\right] \\
&= \mathbf{y}(s).
\end{aligned}$$

Bemerkung: Bei nichtebenen Kurven ist der obige Satz nicht anwendbar. Ein Gegenbeispiel ist die Schraubenlinie.

2.6.2 Böschungslinie

Böschungslinien sind Kurven mit konstantem "Anstieg" gegenüber der $\mathbf{y}_1$-$\mathbf{y}_2$-Ebene.

- $\mathbf{t}(s)$ hat eine konstante Projektion auf $(0, 0, t_3(s))^T = const$ in die $\mathbf{y}_3$-Achse, d.h. die Tangentialvektoren verschiedener Parameter s und $\tilde{s}$ gehen durch Rotation um die y_3-Achse ineinander über.
- $(\mathbf{t}(s), \mathbf{e}_3) = \cos(\sphericalangle(\mathbf{t}(s), \mathbf{e}_3)) = const$

Eine allgemeinere Formulierung entsteht, wenn anstelle des Vektors $\mathbf{e}_3$ ein beliebiger Vektor $\mathbf{e}$ tritt, mit

$$|\mathbf{e}| = 1, \text{ so daß } \tau = (\mathbf{t}(s), \mathbf{e}) = \cos(\sphericalangle(\mathbf{t}(s), \mathbf{e})) = const.$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\tau &= 0 = (\mathbf{t}'(s), \mathbf{e}) = (k(s)\mathbf{n}(s), \mathbf{e}) \qquad \text{beachte die Frenetschen Formeln (2.4-5)} \\
&\Rightarrow (\mathbf{n}(s), \mathbf{e}) = 0 \text{ für } k(s) \neq 0 \\
\frac{d}{ds}(k(s)\mathbf{n}(s), \mathbf{e}) &= 0 = (k'(s) \underbrace{\mathbf{n}(s), \mathbf{e}}_{=0}) + (k(s)\mathbf{n}'(s), \mathbf{e}) = (k(s)\mathbf{n}'(s), \mathbf{e}) = (k(s)(-k(s)\mathbf{t}(s) + w(s)\mathbf{b}(s)), \mathbf{e}) = 0 \\
&\Rightarrow -k(s)\tau + w(s)(\mathbf{b}(s), \mathbf{e}) = 0 \\
&\Rightarrow k(s)\tau = w(s)(\mathbf{b}(s), \mathbf{e})
\end{aligned}$$

$$(\mathbf{b}'(s), \mathbf{e}) = (-w(s) \underbrace{\mathbf{n}(s), \mathbf{e}}_{=0}) = 0 \quad \Rightarrow (\mathbf{b}(s), \mathbf{e}) = const$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow k(s) \underbrace{\tau}_{=const} = w(s) \underbrace{(\mathbf{b}(s), \mathbf{e})}_{=const} \\
&\Rightarrow k(s) \sim w(s)
\end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß bei einer Böschungslinie die Krümmung proportional zur Windung ist. Umgekehrt kann man zeigen, daß eine Kurve, deren Krümmung und Windung proportional sind, eine Böschungslinie ist.
Wenn $w(s) = c\ k(s)$ gilt, so gibt es einen Vektor $\mathbf{e}$, so daß $(\mathbf{t}(s), \mathbf{e}) = \tau = const$ gilt. Ist $c = \cot\alpha$ so folgt $\mathbf{e}(s) = \cos\alpha\mathbf{t}(s) + \sin\alpha\mathbf{b}(s)$ ist ein konstanter Vektor mit $|\mathbf{e}| = 1$ da

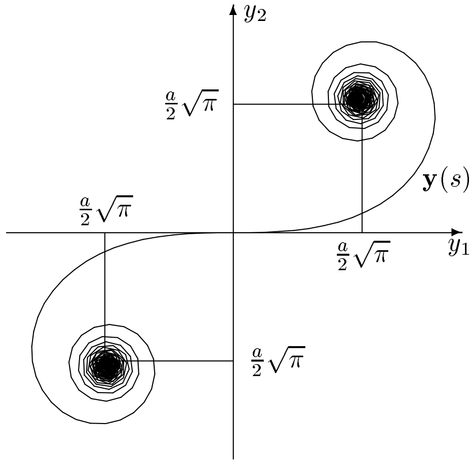
$$\begin{aligned}
(\mathbf{t}(s), \mathbf{e}) &= \cos\alpha \\
\mathbf{e}'(s) &= \cos\alpha\ \mathbf{t}'(s) + \sin\alpha\ \mathbf{b}'(s) \\
& \quad \text{nach den Frenetschen Formeln (2.4-5) folgt} \\
&= \cos\alpha\ k(s)\mathbf{n}(s) - \sin\alpha\ w(s)\mathbf{n}(s) \\
&= (\cos\alpha\ k(s) - \sin\alpha\ w(s))\mathbf{n}(s) \\
&= (\cos\alpha\ k(s) - \sin\alpha\cot\alpha\ k(s))\mathbf{n}(s) \\
&= \underbrace{(\cos\alpha - \sin\alpha\cot\alpha)}_{=0} k(s)\mathbf{n}(s) \\
\Rightarrow \mathbf{e}(s) &= const
\end{aligned}$$

Satz 2.6.2 (Saint Venant - Notwendige und Hinreichende Bedingung einer Böschungslinie) *Die Kurve $\Gamma = \{\mathbf{y} \ : \ \mathbf{y} = \mathbf{y}(s),\ \forall s \in \mathbf{S} \subset \mathbf{R}\}$ ist genau dann eine Böschungslinie, wenn es eine Konstante c mit $w(s) = c\ k(s)$ gibt. [Klotz1]*

2.6.3 Klothoide

Eine Klothoide zeichnet sich durch die Proportionalität zwischen Bogenlänge und Krümmung aus, wobei die Windung Null ist. Klothoiden sind durch die folgende Parameterdarstellung charakteriseirt.

$$y_1(s) = \int_0^s \cos(\frac{s^2}{2a^2})ds, \quad y_2(s) = \int_0^s \sin(\frac{s^2}{2a^2})ds, \quad y_3(s) = 0$$



$$\mathbf{y}'(s) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{s^2}{2a^2}) \\ \sin(\frac{s^2}{2a^2}) \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{y}''(s) = \begin{pmatrix} -\frac{s}{a^2}\sin(\frac{s^2}{2a^2}) \\ \frac{s}{a^2}\cos(\frac{s^2}{2a^2}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow k(s) = |\mathbf{y}''(s)| = a^{-2}\ s$$

Es stellt sich die Frage, wie das Verhalten der Kurven für die Grenzwerte $s \to \pm\infty$ aussieht. Dazu soll eine Substitution $s \to \sqrt{\pi}\ a\tau$ betrachtet werden.

$$\begin{aligned} y_1(s(t)) &= \int_0^s \cos(\tfrac{s^2}{2a^2})ds &&= a\sqrt{\pi}\int_0^t \cos(\tfrac{\pi\tau^2}{2})d\tau \\ y_2(s(t)) &= \int_0^s \sin(\tfrac{s^2}{2a^2})ds &&= a\sqrt{\pi}\int_0^t \sin(\tfrac{\pi\tau^2}{2})d\tau \end{aligned}$$

Diese Integrale sind Fresnell-Integrale und ihr Grenzwert liegt bei 1/2. Daraus folgt

$$\mathbf{y}(t) \to \frac{a}{2}\sqrt{\pi}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } t \to \pm\infty.$$

Kapitel 3

Flächen im Raum

3.1 Parameterdarstellung

3.1.1 Grundlagen

Definition 3.1.1 (Fläche) *Eine Fläche im Raum ist eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit*

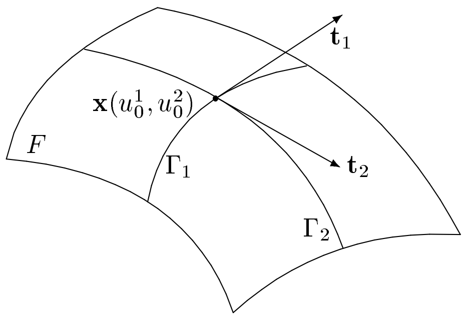
$$F = \{\mathbf{x}(u^1, u^2) \ : \ \forall (u^1, u^2) \in \mathbf{I} \subset \mathbf{R}^2\} \qquad \textit{mit} \qquad \mathbf{x}(u^1, u^2) := \begin{pmatrix} x_1(u^1, u^2) \\ x_2(u^1, u^2) \\ x_3(u^1, u^2) \end{pmatrix},$$

wobei $x_i,\ i = 1, 2, 3$ *Funktionen von den zwei Veränderlichen* $u^j,\ j = 1, 2$ *sind.*

Betrachtung: Wird ein Parameter konstant gehalten $u^j = c_j = const,\ j = 1, 2$, so werden die Kurven $\Gamma_j\ j = 1, 2$ beschrieben, die in der Fläche F liegen.

$$\Gamma_1 = \{\mathbf{y} \ : \ \mathbf{y}(u^1) = \mathbf{x}(u^1, c_2),\ \forall (u^1, c_2) \in \mathbf{I} \subset \mathbf{R}^2\} \subset F,$$

$$\Gamma_2 = \{\mathbf{y} \ : \ \mathbf{y}(u^2) = \mathbf{x}(c_1, u^2),\ \forall (c_1, u^2) \in \mathbf{I} \subset \mathbf{R}^2\} \subset F.$$



In einem ausgezeichneten Punkt $(u_0^1, u_0^2) \in \mathbf{I}$ kann man so zwei Tangentenvektoren definieren, die jeweils die Tangentenvektoren an die Kurven Γ_1 und Γ_2 sind.

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\partial}{\partial u^1}\mathbf{x}(u^1, u_0^2)\Big|_{u_0^1} = \mathbf{x}_{,1} \quad \text{und} \quad \mathbf{t}_2 = \frac{\partial}{\partial u^2}\mathbf{x}(u_0^1, u^2)\Big|_{u_0^2} = \mathbf{x}_{,2}$$

Definition 3.1.2 (Koordinatenlinien von Flächen) *Die ausgezeichneten Kurven*

$$\Gamma_1 = \{\mathbf{y}_1 : \ \mathbf{y}_1(u^1) = \mathbf{x}(u^1, c_1 = const);\ (u^1, c_1) \in \mathbf{I}\}, \tag{3.1-1}$$

$$\Gamma_2 = \{\mathbf{y}_2 : \ \mathbf{y}_2(u^2) = \mathbf{x}(c_2 = const, u^2);\ (c_2, u^2) \in \mathbf{I}\} \tag{3.1-2}$$

der Fläche $F = \{\mathbf{x} : \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2),\ (u^1, u^2) \in \mathbf{I}\}$ *werden als Koordinatenlinien der Fläche* F *bezeichnet.*

Bemerkung: Die Gestalt der Koordinatenlinien ist von der gewählten Parameterdarstellung abhängig.

Schreibweise: In Anlehnung an die Tensorrechnung soll die Schreibweise

$$\mathbf{x}_{,i} = \frac{\partial}{\partial u^i}\mathbf{x}(u^1, u^2), \qquad i = 1, 2$$

und die Einsteinsche Summenkonvention eingeführt werden.

Definition 3.1.3 (Einsteinsche Summenkonvention) *Es gilt die Vereinbarung, daß über gleiche obere und untere Indizes von 1 bis n summiert wird, z.B.*

$$\mathbf{x}_{,i}\ddot{u}^i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_{,i}\ddot{u}^i \qquad \textit{oder} \qquad \mathbf{x}_{,ij}\dot{u}^i\dot{u}^j = \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{x}_{,ij}\dot{u}^i\dot{u}^j \tag{3.1-3}$$

Hier wird meist bis $n = 2$ oder $n = 3$ summiert.

Definition 3.1.4 (zulässige Parameterdarstellung einer Fläche) *Eine Parameterdarstellung $\mathbf{x}(u^1, u^2)$ der Fläche F heißt zulässig genau dann, wenn die Funktionen $x_i(u^1, u^2)$, $i = 1, 2, 3$ r-mal differenzierbar nach beiden Parametern u^j, $j = 1, 2$, sind und die Tangentialvektoren $\mathbf{t}_i = \mathbf{x}_{,i}$, $i = 1, 2$, linear unabhängig sind.*

Betrachtung: $\mathbf{x}(u^1, u^2)$ sind drei Funktionen von zwei Parametern. Stellt man die Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J}_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u^1} & \frac{\partial x_1}{\partial u^2} \\ \\ \frac{\partial x_2}{\partial u^1} & \frac{\partial x_2}{\partial u^2} \\ \\ \frac{\partial x_3}{\partial u^1} & \frac{\partial x_3}{\partial u^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{,1} & \mathbf{x}_{,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{J}_F(u^1, u^2)$$

auf, so ergibt sich eine hinreichende Bedingung der Zulässigkeit.

Lemma 3.1.1 (hinreichende Bedingung der Zulässigkeit einer Parameterdarstellung) *Eine Parameterdarstellung $\mathbf{x}(u^1, u^2)$ der Fläche F heißt zulässig genau dann, wenn*

1. *die Jacobimatrix $\mathbf{J}_F(u^1, u^2)$ den Rang 2 für alle u^1, u^2 besitzt, oder*
2. *das Kreuzprodukt der Tangentialvektoren ungleich Null ist $\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2 = \mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2} \neq 0$.*

Von jeder dieser Bedingungen kann auf die andere geschlossen werden.

Bemerkung: Eine beliebige Kurve Γ in einer Fläche F habe die Darstellung $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(u^1(t), u^2(t))$, so bestimmen sich die erste und zweite Ableitung der Kurve wie folgt.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}(t) &= \frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}_{,1}\dot{u}^1(t) + \mathbf{x}_{,2}\dot{u}^2(t) = \mathbf{x}_{,i}\dot{u}^i(t) = \mathbf{J}_F \begin{pmatrix} \dot{u}^1(t) \\ \dot{u}^2(t) \end{pmatrix} \\ \ddot{\mathbf{y}}(t) &= \frac{d}{dt}(\mathbf{J}_F \begin{pmatrix} \dot{u}^1(t) \\ \dot{u}^2(t) \end{pmatrix}) = \frac{d}{dt}\mathbf{J}_F \begin{pmatrix} \dot{u}^1(t) \\ \dot{u}^2(t) \end{pmatrix} + \mathbf{J}_F \begin{pmatrix} \ddot{u}^1(t) \\ \ddot{u}^2(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{J}_F = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{,1} & \mathbf{x}_{,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{,11}\dot{u}^1 + \mathbf{x}_{,12}\dot{u}^2 & \mathbf{x}_{,21}\dot{u}^1 + \mathbf{x}_{,22}\dot{u}^2 \end{pmatrix}$$

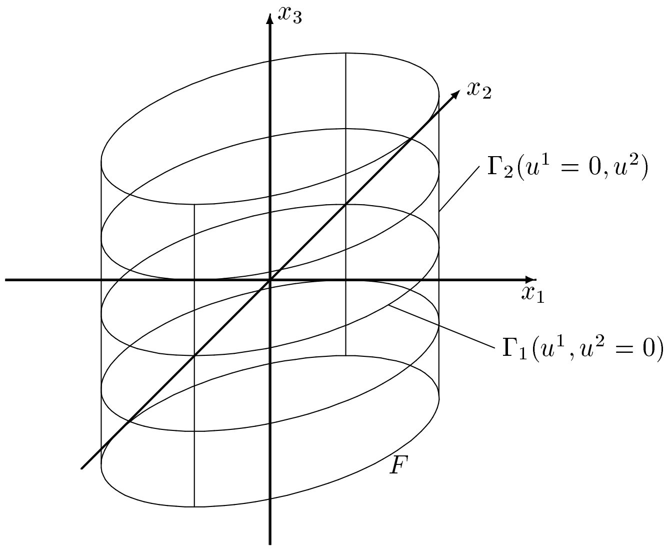
$$= \sum_{i,j=1}^{2} \mathbf{x}_{,ij}\dot{u}^i\dot{u}^j + \sum_{i=1}^{2} \mathbf{x}_{,i}\ddot{u}^i = \mathbf{x}_{,ij}\dot{u}^i\dot{u}^j + \mathbf{x}_{,i}\ddot{u}^i$$

Beispiel: Zylinder

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r\cos(u^1) \\ r\sin(u^1) \\ u^2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} u^1 \in [0, 2\pi) \\ u^2 \in (-\infty, \infty) \end{array}$$

$$\mathbf{x}_{,1} = \begin{pmatrix} -r\sin(u^1) \\ r\cos(u^1) \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{J}_F = \begin{pmatrix} -r\sin(u^1) & 0 \\ r\cos(u^1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



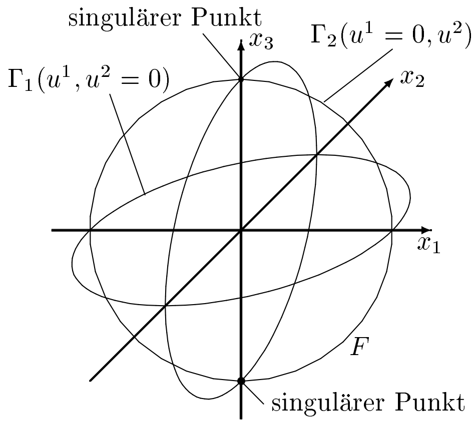
Die Jacobimatrix hat für alle u^1, u^2 den Rang 2, deswegen ist die Parameterdarstellung stets zulässig. Die Tangentialvektoren sind orthogonal zueinander, demzufolge ist die verwendete Parametrisierung die Gaußsche Parametrisierung (vgl. Def. 3.1.8). ■

Beispiel: Kugel mit Mittelpunkt im Ursprung

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r\cos(u^1)\cos(u^2) \\ r\sin(u^1)\cos(u^2) \\ r\sin(u^2) \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} u^1 \in [0, 2\pi) \\ u^2 \in (-\pi/2, \pi/2) \end{array}$$

$$\mathbf{x}_{,1} = \begin{pmatrix} -r\sin(u^1)\cos(u^2) \\ r\cos(u^1)\cos(u^2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{,2} = \begin{pmatrix} -r\cos(u^1)\sin(u^2) \\ -r\sin(u^1)\sin(u^2) \\ r\cos(u^2) \end{pmatrix}$$



Der Parameter u^1 entspricht der geografischen Länge und u^2 der geografischen Breite. Für $u^2 = \pm\pi/2$ ist der Tangentialvektor $\mathbf{t}_1 = \mathbf{x}_{,1}$ identisch Null. Somit ist der Rang der Jacobimatrix

$$\Rightarrow \mathbf{J}_F = \begin{pmatrix} -r\sin(u^1)\cos(u^2) & -r\cos(u^1)\sin(u^2) \\ r\cos(u^1)\cos(u^2) & -r\sin(u^1)\sin(u^2) \\ 0 & r\cos(u^2) \end{pmatrix}$$

an diesen Stellen nur 1, in allen übrigen Punkten (u^1, u^2) ist der Rang jedoch 2, so daß diese Parameterdarstellung bis auf die Pole der Kugel zulässig ist. Punkte, in denen die Jacobimatrix einen Rang kleiner zwei besitzt, werden als singuläre Punkte bezeichnet. Die Pole $(0, 0, \pm r)^T$ entsprechen solchen. Singuläre Punkte sind Flächenpunkte mit besonderen Eigenschaften, die meist gesondert behandelt werden müssen. ■

Bezeichnung:

- Gilt *rank* $\mathbf{J}_F(u^1, u^2) = 2 \ \forall (u^1, u^2) \in \mathbf{I}$ so wird die Parameterdarstellung als zulässig bezeichnet. F hat keine singulären Punkte.

- Gilt *rank* $\mathbf{J}_F(u^1, u^2) < 2$ für ein $(u^1_0, u^2_0) \in \mathbf{I}$, so wird $\mathbf{x}(u^1_0, u^2_0)$ als singulärer Punkt bzgl. der Parameterdarstellung bezeichnet.

- Ist ein Flächenpunkt $\mathbf{x}$ unabhängig von der Wahl der Parametrisierung singulärer Punkt, so wird dieser Punkt als singulärer Punkt der Fläche bezeichnet. (z.B. Kegelspitze)

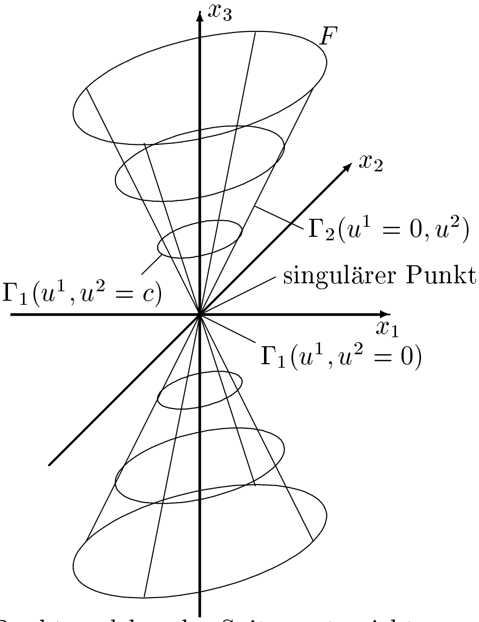
Beispiel: Kegel

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} u^2\cos(u^1) \\ u^2\sin(u^1) \\ mu^2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} u^1 \in [0, 2\pi) \\ u^2 \in (-\infty, \infty) \end{array}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}_{,1} = \begin{pmatrix} -u^2\sin(u^1) \\ u^2\cos(u^1) \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{,2} = \begin{pmatrix} \cos(u^1) \\ \sin(u^1) \\ m \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \mathbf{J}_F = \begin{pmatrix} -u^2\sin(u^1) & \cos(u^1) \\ u^2\cos(u^1) & \sin(u^1) \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{J}_F = \begin{pmatrix} 0 & \cos(u^1) \\ 0 & \sin(u^1) \\ 0 & m \end{pmatrix} \qquad \text{für } u^2 = 0$$



Der Kegel hat somit im Koordinatenursprung einen singulären Punkt, welcher der Spitze entspricht. ■

3.1.2 Tangentialebene, Normalenvektor und das begleitende Dreibein

Es wird eine Fläche F mit der Parameterdarstellung $\mathbf{x}(u^1, u^2)$ betrachtet. Die Tangentialvektoren $\mathbf{t}_i = \mathbf{x}_{,i}$ seien linear unabhängig, so daß die Parameterdarstellung zulässig ist. Durch diese Tangentialvektoren, wird eine Ebene aufgespannt, die sogenannte Tangentialebene.

Definition 3.1.5 (Tangentialebene einer Fläche) *Die Ebene E_T, die den Punkt $\mathbf{x}(u_0^1, u_0^2)$ der Fläche F enthält, und durch die Tangentialvektoren $\mathbf{t}_1$ und $\mathbf{t}_2$ aufgespannt wird, hat die folgende Parameterdarstellung*

$$E_T = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^3 \;:\; \mathbf{y} = \mathbf{x}(u_0^1, u_0^2) + \lambda \mathbf{t}_1(u_0^1, u_0^2) + \mu \mathbf{t}_2(u_0^1, u_0^2)\}$$

und wird als Tangentialebene der Ebene F im Punkt $\mathbf{x}(u_0^1, u_0^2)$ bezeichnet.

Bemerkung: 1) Es ist zu beachten, daß je nach Gestalt der Fläche entweder nur $\mathbf{x}(u_0^1, u_0^2)$ der Schnittpunkt oder eine ganze Schnittfigur entsteht, siehe dazu Klasseneinteilung der Flächenpunkte auf Seite 67.
2) Die Tangentialebene ist unabhängig von der gewählten Parameterdarstellung der Fläche.
3) Die Tangentenvektoren $\mathbf{t}_i(u^1, u^2) = \mathbf{x}_{,i}(u^1, u^2), \; i = 1, 2$ sind nicht notwendig orthogonal.

Definition 3.1.6 (Normalenvektor einer Fläche) *Der Vektor $\mathbf{f}$ mit $|\mathbf{f}| = 1$, der senkrecht auf der Tangentialebene E_T der Fläche F steht und mit den Tangentialvektoren $\mathbf{t}_1$ und $\mathbf{t}_2$ das Rechtssystem $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{f})$ bildet (siehe Seite 11), wird als Normalenvektor der Fläche F bezeichnet.*

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2}{|\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2|} = \frac{\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}}{|\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}|} \tag{3.1-4}$$

Bemerkung: Es gilt

$$|\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}|^2 = \underbrace{((\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}), (\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}))}_{\text{Lagrangesche Identität}} = \begin{vmatrix} (\mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,1}) & (\mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,2}) \\ (\mathbf{x}_{,2}, \mathbf{x}_{,1}) & (\mathbf{x}_{,2}, \mathbf{x}_{,2}) \end{vmatrix} = det(\mathbf{J}_F^T \mathbf{J}_F)$$

Definition 3.1.7 (begleitendes Dreibein einer Fläche) *Das System* $(\mathbf{t}_1(u^1,u^2), \mathbf{t}_2(u^1,u^2), \mathbf{f}(u^1,u^2))$ *der beschriebenen Vektoren wird als begleitendes Dreibein der Fläche* $F = \{\mathbf{x} : \; \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1,u^2), \; (u^1,u^2) \in \mathbf{I}\}$ *bezeichnet.*

Bemerkung: Wie bereits bemerkt wurde, ist darauf zu achten, daß die Tangentenvektoren der Fläche $\mathbf{t}_i(u^1,u^2) = \mathbf{x}_{,i}(u^1,u^2), \; i = 1,2$ weder normiert noch orthogonal sein müssen. Demzufolge ist das begleitende Dreibein einer Fläche nicht notwendig ein Orthogonalsystem.

3.1.3 Parametertransformation

Betrachtung: Es soll eine Fläche F mit der zulässigen Parameterdarstellung $\mathbf{x}(u^1,u^2)$ mit $(u^1,u^2) \in \mathbf{I} \subset \mathbf{R}^2$ betrachtet werden. Weiterhin wird eine eineindeutige Abbildung

$$\mathbf{A}(\cdot) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

untersucht. $\mathbf{A}(\cdot)$ muß keine lineare Abbildung sein. Es soll gelten

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}(\bar{\mathbf{u}}) \text{ mit } \mathbf{u} = (u^1,u^2)^T, \; \bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}^1,\bar{u}^2)^T.$$

Durch diese Abbildung geht das Gebiet $\bar{\mathbf{I}}$ in das Gebiet $\mathbf{I}$ über.

$$\mathbf{A}(\cdot) : \bar{\mathbf{I}} \to \mathbf{I}$$

Ausführlich gilt

$$u^i = a_i(\bar{u}^1,\bar{u}^2), \; i = 1,2$$

Diese Abbildung ist eineindeutig, genau dann, wenn die Funktionaldeterminante $det(T)$ ungleich Null ist.

$$\det(T) = \begin{vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial \bar{u}^1} & \frac{\partial a_1}{\partial \bar{u}^2} \\ \frac{\partial a_2}{\partial \bar{u}^1} & \frac{\partial a_2}{\partial \bar{u}^2} \end{vmatrix} \neq 0$$

Demzufolge ist diese Koordinatentransformation zulässig und die Darstellung

$$\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}^1,\bar{u}^2) = \mathbf{x}(a_1(\bar{u}^1,\bar{u}^2), a_2(\bar{u}^1,\bar{u}^2))$$

ist wieder eine zulässige Parameterdarstellung. ■

Definition 3.1.8 (Gaußsche Parametrisierung) *Eine besondere Parameterdarstellung* $\mathbf{x}(u^1,u^2)$ *einer Fläche* F *ist die Gaußsche Parametrisierung, wenn gilt*

$$\mathbf{x}_{,1} \perp \mathbf{x}_{,2} \; \forall (u^1,u^2) \in \mathbf{I}.$$

Folgerung: Flächen, die in der Gaußschen Parametrisierung gegeben sind, besitzen in allen Flächenpunkten ein orthogonales, jedoch nicht notwendig ein orthonormales, begleitendes Dreibein.

3.1.4 Spezielle Flächen und ihre Gaußsche Parameterdarstellung

Bemerkung: Die Gaußsche Parametrisierung ist durch die Orthogonalität der Tangentialvektoren ausgezeichnet. Dies wiederum bedeutet, daß das Produkt $\mathbf{J}_F^T \mathbf{J}_F$ der Jacobimatrix der Fläche mit sich selbst, unabhängig von den Parametern u^1 und u^2, eine Diagonalmatrix ist, da das Skalarprodukt zweier orthogonaler Vektoren Null ist.

Beispiel: Zylinder

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r\cos(u^1) \\ r\sin(u^1) \\ u^2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} u^1 \in [0, 2\pi) \\ u^2 \in (-\infty, \infty) \end{matrix} \qquad \Rightarrow \mathbf{x}_{,1} = \begin{pmatrix} -r\sin(u^1) \\ r\cos(u^1) \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{J}_F = \begin{pmatrix} -r\sin(u^1) & 0 \\ r\cos(u^1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \mathbf{J}_F^T \mathbf{J}_F = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die angegebene Parameterdarstellung ist folglich eine Gaußsche Parametrisierung. ■

Beispiel: Kugel mit Mittelpunkt im Ursprung

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r\cos(u^1)\cos(u^2) \\ r\sin(u^1)\cos(u^2) \\ r\sin(u^2) \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} u^1 \in [0, 2\pi) \\ u^2 \in [-\pi/2, \pi/2] \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}_{,1} = \begin{pmatrix} -r\sin(u^1)\cos(u^2) \\ r\cos(u^1)\cos(u^2) \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{,2} = \begin{pmatrix} -r\cos(u^1)\sin(u^2) \\ -r\sin(u^1)\sin(u^2) \\ r\cos(u^2) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{J}_F = \begin{pmatrix} -r\sin(u^1)\cos(u^2) & -r\cos(u^1)\sin(u^2) \\ r\cos(u^1)\cos(u^2) & -r\sin(u^1)\sin(u^2) \\ 0 & r\cos(u^2) \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \mathbf{J}_F^T \mathbf{J}_F = \begin{pmatrix} r^2\cos^2(u^2) & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

Auch diese Parameterdarstellung ist folglich eine Gaußsche Parametrisierung. Es ist anzumerken, daß die Determinante $det(\mathbf{J}_F^T \mathbf{J}_F)$ für $u^2 = \pm\pi/2$ identisch Null ist. Dies entspricht den singulären Punkten. ■

Beispiel: Kegel

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} u^2\cos(u^1) \\ u^2\sin(u^1) \\ mu^2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} u^1 \in [0, 2\pi) \\ u^2 \in (-\infty, \infty) \end{matrix} \qquad \Rightarrow \mathbf{x}_{,1} = \begin{pmatrix} -u^2\sin(u^1) \\ u^2\cos(u^1) \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{,2} = \begin{pmatrix} \cos(u^1) \\ \sin(u^1) \\ m \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \mathbf{J}_F = \begin{pmatrix} -u^2\sin(u^1) & \cos(u^1) \\ u^2\cos(u^1) & \sin(u^1) \\ 0 & m \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \mathbf{J}_F^T \mathbf{J}_F = \begin{pmatrix} (u^2)^2 & 0 \\ 0 & m^2+1 \end{pmatrix}$$

Diese Parameterdarstellung ist ebenfalls eine Gaußsche Parametrisierung, wobei wieder in dem singulären Punkt bei $u^2 = 0$ die Determinante $det(\mathbf{J}_F^T \mathbf{J}_F)$ identisch Null ist. ■

Beispiel: Fläche der Funktion $x_3 = f(x_1, x_2)$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ f(u^1, u^2) \end{pmatrix}, \qquad \Rightarrow \mathbf{x}_{,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_{,1}(u^1, u^2) \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_{,2}(u^1, u^2) \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \mathbf{J}_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_{,1}(u^1, u^2) & f_{,2}(u^1, u^2) \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \mathbf{J}_F^T \mathbf{J}_F = \begin{pmatrix} 1+f_{,1}^2 & f_{,1}\, f_{,2} \\ f_{,1}\, f_{,2} & 1+f_{,2}^2 \end{pmatrix}$$

Diese Parameterdarstellung ist zwar stets zulässig jedoch nur Gaußsche Parametrisierung, wenn $f_{,1}$ oder $f_{,2}$ Null ist. ■

Beispiel: Rotationsflächen Eine Rotationsfläche wird durch Rotation einer Kurve um eine Achse erzeugt. Z.B. rotiert eine Kurve in der x_1-x_3-Ebene um die x_3-Achse.

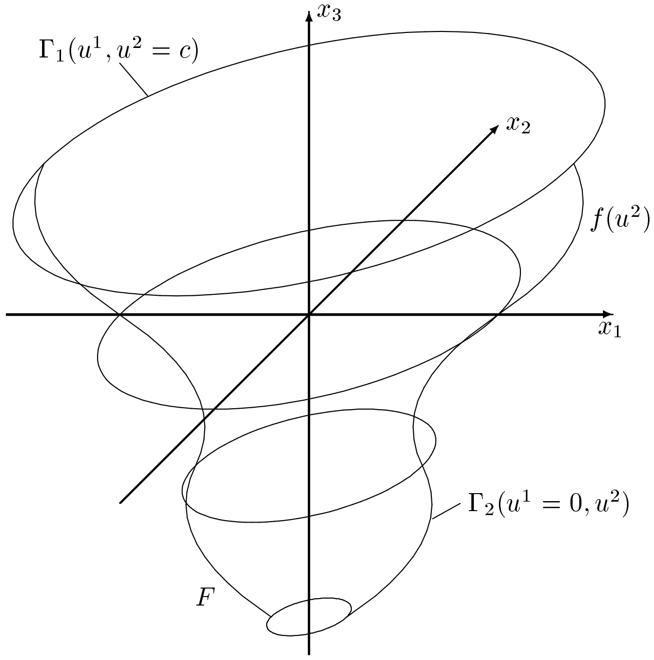
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} f(u^2)\cos(u^1) \\ f(u^2)\sin(u^1) \\ u^2 \end{pmatrix},$$

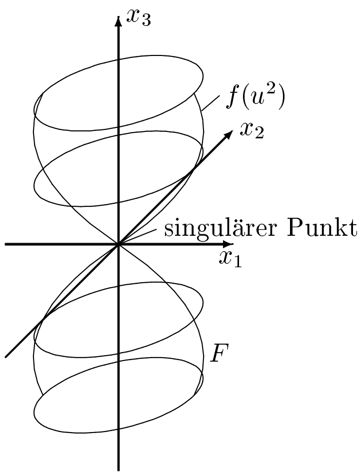
$$\Rightarrow \mathbf{x}_{,1} = \begin{pmatrix} -f(u^2)\sin(u^1) \\ f(u^2)\cos(u^1) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_{,2} = \begin{pmatrix} f'(u^2)\cos(u^1) \\ f'(u^2)\sin(u^1) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{J}_F = \begin{pmatrix} -f(u^2)\sin(u^1) & f'(u^2)\cos(u^1) \\ f(u^2)\cos(u^1) & f'(u^2)\sin(u^1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{J}_F^T\mathbf{J}_F = \begin{pmatrix} f^2(u^2) & 0 \\ 0 & 1+f'^2(u^2) \end{pmatrix}$$





Die ersten beiden Komponenten der Parameterdarstellung entsprechen einem Kreis mit dem Radius $f(u^2)$ und die dritte der Höhe.
Der Zylinder ist eine Drehfläche mit der Funktion $f(u^2) = r$ und der Kegel mit $f(u^2) = u^2/m$. Die Kugel ist ebenfalls eine Drehfläche.
Denkbar ist auch eine Drehfläche hervorgehend aus eine Funktion $f(u^2)$, die die x_3-Achse schneidet, wobei dieser Punkt singulär ist. (siehe nebenstehende Abbildung)
Eine weitere spezielle Drehfläche entsteht bei der Rotation der sogenannten Glockenkurve e^{t^2}.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} u^2\cos(u^1) \\ u^2\sin(u^1) \\ e^{-(u^2)^2} \end{pmatrix} \qquad e \text{ - Eulersche Zahl}$$

3.2 Spezielle Flächen

3.2.1 Regelflächen, Tangentenflächen und Torsen

Definition 3.2.1 (Regelflächen) *Eine Regelfläche F wird erzeugt, durch eine Kurve $\Gamma \subset F$ mit der Parameterdarstellung $\mathbf{y}_0(u^1)$ und einem Richtungsvektor $\mathbf{a}(u^1)$ nach der Vorschrift*

$$F = \{\mathbf{x} \;:\; \mathbf{x}(u^1, u^2) = \mathbf{y}_0(u^1) + u^2\mathbf{a}(u^1),\ \forall u^1, u^2 \in \mathbf{R}\}.$$

Bemerkung: 1) Die angegebene Parametrisierung ist zulässig, solange $\dot{\mathbf{y}}_0(u^1) + u^2\dot{\mathbf{a}}(u^1)$ und $\mathbf{a}(u^1)$ linear unabhängig voneinander sind, da

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{x}_{,1} = \dot{\mathbf{y}}_0(u^1) + u^2\dot{\mathbf{a}}(u^1) \quad \text{und} \quad \mathbf{t}_2 = \mathbf{x}_{,2} = \mathbf{a}(u^1).$$

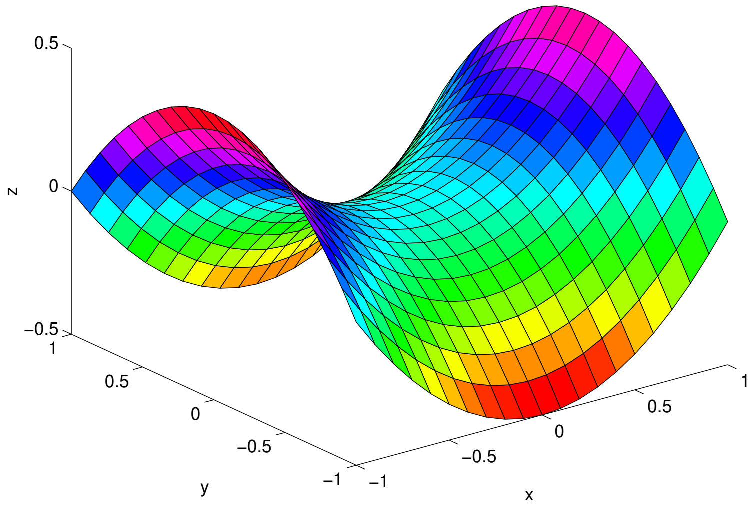
2) Man kann eine Regelfläche als eine sich durch den Raum bewegende Gerade betrachten.

Beispiel: Hyperbolisches Paraboloid

Es soll das Koordinatensystem (x, y, z) anstelle des Koordinatensystemes (x_1, x_2, x_3) betrachtet werden. Das hyperbolische Paraboloid hat somit eine Parameterdarstellung der Form

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 2cz = 0$$

Für $z = const \neq 0$ ergibt sich eine Hyperbel in der x-y-Ebene, für $z = 0$ zwei Geraden $|y| = \frac{b}{a}|x|$ und für $x = const$ oder $y = const$ ergibt sich eine Parabel in der y-z-Ebene bzw. x-z-Ebene. Man kann ausgehend von der obigen Darstellung die folgende Transformation durchführen.



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 2cz = 0 \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)}_{u^1}\underbrace{\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)}_{u^2} + 2cz = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} u^1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \\ \\ u^2 = \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{a}{2}(u^1 + u^2) \\ \\ y = \frac{b}{2}(u^1 - u^2) \\ \\ z = -\frac{u^1 u^2}{2c} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow F = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2}(u^1 + u^2) \\ \\ \frac{b}{2}(u^1 - u^2) \\ \\ -\frac{u^1 u^2}{2c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2}u^1 \\ \\ \frac{b}{2}u^1 \\ \\ 0 \end{pmatrix} + u^2 \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \\ -\frac{b}{2} \\ \\ -\frac{u^1}{2c} \end{pmatrix} = \mathbf{y}_0(u^1) + u^2\mathbf{a}(u^1)$$

Demzufolge ist das hyperbolische Paraboloid eine Regelfläche.
Eine andere Art nachzuweisen, daß eine Fläche eine Regelfläche ist, führt über die Konstruktion zweier Ebenen zu einem Parameter λ, die als Schnitt eine Gerade besitzen, die in der Fläche liegt. Wenn der Parameter λ durch den gesamten $\mathbf{R}$ läuft, ergeben die so konstruierten Geraden dann die Fläche F.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 2cz = 0 \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)}_{\lambda}\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) + 2cz = 0$$

daraus ergeben sich nun die zwei Ebenen

$$E^1_\lambda := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ \lambda = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}; \lambda \text{ vorgegebener freier Parameter}\},$$

$$E^2_\lambda := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ \lambda\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) + 2cz = 0; \lambda \text{ vorgegebener freier Parameter}\}.$$

Der (Durch-) Schnitt dieser beiden Ebenen ist die Menge aller (x, y, z) die sowohl die Ebenengleichung für E^1_λ als auch für E^2_λ erfüllen und eine Gerade, die in der Fläche F liegt, da

$$\begin{aligned} E^1_\lambda \cap E^2_\lambda &= \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ \lambda = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}; \lambda \text{ fest}\right\} \cap \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ \lambda\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) + 2cz = 0; \lambda \text{ fest}\right\} \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ \lambda = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \text{ und } \lambda\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) + 2cz = 0; \lambda \text{ fest}\right\} \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) + 2cz = 0; \lambda = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \text{ fest}\right\}. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß in Abhängigkeit des Parameters λ eine Schar von Geraden

$$G_\lambda = E^1_\lambda \cap E^2_\lambda$$

konstruiert wurde, mit der die gesamte Fläche abgedeckt wird.
Auf die selbe Art und Weise wird eine zweite, von der ersten verschiedenen, Kurvenschar konstruiert.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 2cz = 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \underbrace{\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)}_{\mu} + 2cz = 0$$

Daraus ergeben sich die zwei Ebenen

$$E^1_\mu := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ \mu = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}; \mu \text{ vorgegebener freier Parameter}\},$$

$$E^2_\mu := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\mu + 2cz = 0; \mu \text{ vorgegebener freier Parameter}\}.$$

Der (Durch-) Schnitt dieser beiden Ebenen ist die Menge aller (x,y,z) die sowohl die Ebenengleichung für E^1_μ als auch für E^2_μ erfüllen und wiederum eine Gerade, die in der Fläche F liegt, da

$$\begin{aligned} E^1_\mu \cap E^2_\mu &= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ \mu = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}; \mu \text{ fest}\right\} \cap \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\mu + 2cz = 0; \mu \text{ fest}\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ \mu = \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \text{ und } \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\mu + 2cz = 0; \mu \text{ fest}\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) + 2cz = 0; \mu = \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \text{ fest}\right\}. \end{aligned}$$

Es wurde also in Abhängigkeit des Parameters μ eine zweite Schar von Geraden

$$G_\mu = E^1_\mu \cap E^2_\mu$$

konstruiert, die wiederum die gesamte Fläche abdeckt.
Um nun eine Darstellung zu schaffen, die der einer Regelfläche entspricht

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = \mathbf{y}_0(u^1) + u^2\mathbf{a}(u^1)$$

werden die beiden konstruierten Geradenscharen zuhilfe gezogen. Man nimmt z.B. bzgl. des Vektors $\mathbf{x}_0(u^1)$ eine Gerade der zweiten Schar und als Richtungsvektor $\mathbf{a}(u^1)$ eine der ersten. Zur Konstruktion des Vektors $\mathbf{x}_0(u^1)$ soll $\mu = 0$ gewählt werden. Daraus ergeben sich somit die beiden Ebenen

$$E^1_{\mu=0} := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ 0 = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\},$$

$$E^2_{\mu=0} := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ 2cz = 0\}.$$

Beide Ebenen beinhalten den Koordinatenursprung und der Richtungsvektor der Schnittgeraden ergibt sich z.B. als

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

und demzufolge bestimmt sich der Vektor $\mathbf{y}_0(u^1)$ durch

$$\mathbf{y}_0(u^1) = u^1 \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zur Konstruktion des Richtungsvektors $\mathbf{a}(u^1)$ wird wie erwähnt die erste Geradenschar betrachtet. Der Richtungsvektor soll entlang der entsprechenden Gerade führen, also der Richtungsvektor der Schnittgerade der Ebenen

$$E^1_\lambda := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ \lambda = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}\},$$

$$E^2_\lambda := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ \lambda\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) + 2cz = 0\}.$$

sein. Dieser Richtungsvektor ergibt sich unter anderem aus dem Kreuzprodukt der beiden Hauptnormalen $\mathbf{n}^1_\lambda$ und $\mathbf{n}^2_\lambda$ dieser Ebenen.

$$\mathbf{n}^1_\lambda = \begin{pmatrix} 1/a \\ 1/b \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{n}^2_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda/a \\ -\lambda/b \\ 2c \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \mathbf{a}(u^1 = \lambda) = \mathbf{n}^1_\lambda \times \mathbf{n}^2_\lambda = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1/a & 1/b & 0 \\ \lambda/a & -\lambda/b & 2c \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2c/b \\ -2c/a \\ -2\lambda/(ab) \end{pmatrix}$$

Demnach ergibt sich das hyperbolische Paraboloid ebenfalls aus der Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = \underbrace{\begin{pmatrix} au^1 \\ bu^1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}_0(u^1)} + u^2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2c/b \\ -2c/a \\ -2\lambda/(ab) \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}(u^1)},$$

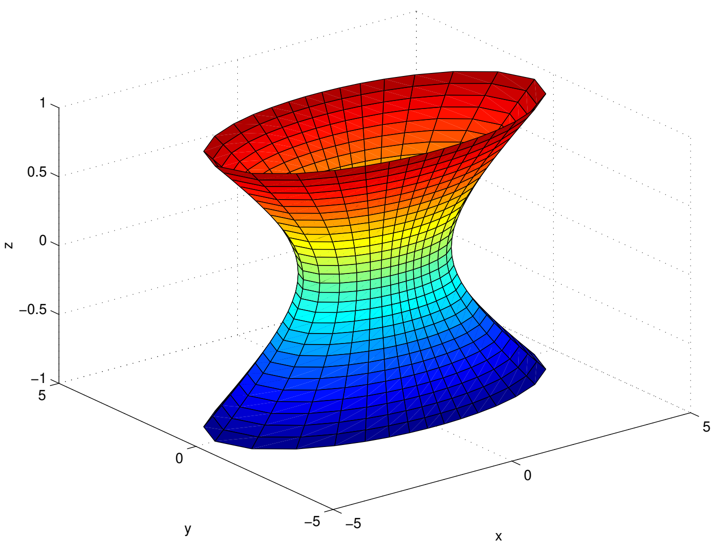
welche zu der bereits obig gewonnenen äquivalent ist, und untermauert, daß eine Parameterdarstellung nicht eineindeutig ist. ■

Beispiel: einschaliges Hyperboloid

Das einschalige Hyperboloid hat im kartesischen Koordinatensystem (x, y, z) die Darstellung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Ein horizontaler Schnitt $z = const$ (x-y-Ebene) ergibt eine Ellipse, deren Gestalt von a und b definiert wird. Ein vertikaler Schnitt (z.B. in der x-z-Ebene $y = const$ oder y-z-Ebene $x = const$) ergeben Hyperbeln.
Nach einer Koordinatentransformation auf Zylinderkoordinaten läßt sich eine Parameterdarstellung in Abhängigkeit des Winkels φ und der Höhe h finden.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\text{Koordinatentransformation} \begin{pmatrix} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \\ z = h \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{(r\cos(\varphi))^2}{a^2} + \frac{(r\sin(\varphi))^2}{b^2} - \frac{h^2}{c^2} = 1$$

$$\Rightarrow \qquad r = \sqrt{(1 + \frac{h^2}{c^2})/(\frac{(\cos(\varphi))^2}{a^2} + \frac{(\sin(\varphi))^2}{b^2})}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x}(\varphi,h) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{(1+\frac{h^2}{c^2})/(\frac{(\cos(\varphi))^2}{a^2}+\frac{(\sin(\varphi))^2}{b^2})}\cos(\varphi) \\ \sqrt{(1+\frac{h^2}{c^2})/(\frac{(\cos(\varphi))^2}{a^2}+\frac{(\sin(\varphi))^2}{b^2})}\sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix} \quad \text{Parameterdarstellung}$$

Auch hier kann in analoger Weise wie beim hyperbolischen Paraboloid gezeigt werden, daß das einschalige Hyperboloid eine Regelfläche ist.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

1.Geradenschar

$$\left(\tfrac{y}{b}+\tfrac{z}{c}\right)\left(\tfrac{y}{b}-\tfrac{z}{c}\right)=\left(1+\tfrac{x}{a}\right)\left(1-\tfrac{x}{a}\right) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)}{\left(1+\frac{x}{a}\right)}}_{\lambda}\left(\tfrac{y}{b}-\tfrac{z}{c^2}\right)=\left(1-\tfrac{x}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rcll} \left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right) & - & \left(1+\frac{x}{a}\right)\lambda & = 0 \Rightarrow \text{Ebene } E_\lambda^1 \\ \lambda\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right) & - & \left(1-\frac{x}{a}\right) & = 0 \Rightarrow \text{Ebene } E_\lambda^2 \end{array}\right\} \text{Gerade}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{n}_\lambda^1 = \begin{pmatrix} -\lambda/a \\ 1/b \\ 1/c \end{pmatrix}, \ \mathbf{n}_\lambda^2 = \begin{pmatrix} 1/a \\ \lambda/b \\ -\lambda/c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a}(u^1=\lambda)=\mathbf{n}_\lambda^1\times\mathbf{n}_\lambda^2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\lambda/a & 1/b & 1/c \\ 1/a & \lambda/b & -\lambda/c \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda/(bc) \\ (1-\lambda^2)/(ac) \\ -(1+\lambda^2)/(ab) \end{pmatrix}$$

2.Geradenschar

$$\left(\tfrac{y}{b}+\tfrac{z}{c}\right)\left(\tfrac{y}{b}-\tfrac{z}{c}\right)=\left(1+\tfrac{x}{a}\right)\left(1-\tfrac{x}{a}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\tfrac{y}{b}+\tfrac{z}{c^2}\right)\underbrace{\frac{\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)}{\left(1-\frac{x}{a}\right)}}_{\mu}=\left(1+\tfrac{x}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rcll} \left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\mu & - & \left(1+\frac{x}{a}\right) & = 0 \Rightarrow \text{Ebene } E_\mu^1 \\ \left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right) & - & \mu\left(1-\frac{x}{a}\right) & = 0 \Rightarrow \text{Ebene } E_\mu^2 \end{array}\right\} \text{Gerade}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{n}_\mu^1 = \begin{pmatrix} -1/a \\ \mu/b \\ \mu/c \end{pmatrix}, \ \mathbf{n}_\mu^2 = \begin{pmatrix} \mu/a \\ 1/b \\ -1/c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{y}_0(u^1=\mu)=\mathbf{n}_\mu^1\times\mathbf{n}_\mu^2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1/a & \mu/b & \mu/c \\ \mu/a & 1/b & -1/c \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2\mu/(bc) \\ (\mu^2-1)/(ac) \\ -(1+\mu^2)/(ab) \end{pmatrix}$$

Parameterdarstellung einer Regelfläche

$$\mathbf{x}(u^1,u^2) = \underbrace{\begin{pmatrix} -2u^1/(bc) \\ ((u^1)^2-1)/(ac) \\ -(1+(u^1)^2)/(ab) \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}_0(u^1)} + u^2 \underbrace{\begin{pmatrix} -2u^1/(bc) \\ (1-(u^1)^2)/(ac) \\ -(1+(u^1)^2)/(ab) \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}(u^1)}$$

Es ist anzumerken, daß diese Herangehensweise nur für spezielle Flächen wie z.B. das hyperbolische Paraboloid oder das einschalige Hyperboloid anwendbar ist. Es kann also für allgemeine Flächen nicht unbedingt auf diesem Weg nachgewiesen werden, ob die Fläche eine Regelfläche ist. ■

Beispiel: Rotationshyperboloid Das Rotationshyperboloid ist ein Spezialfall des einschaligen Hyperboloides und hat im kartesischen Koordinatensystem (x, y, z) die Darstellung

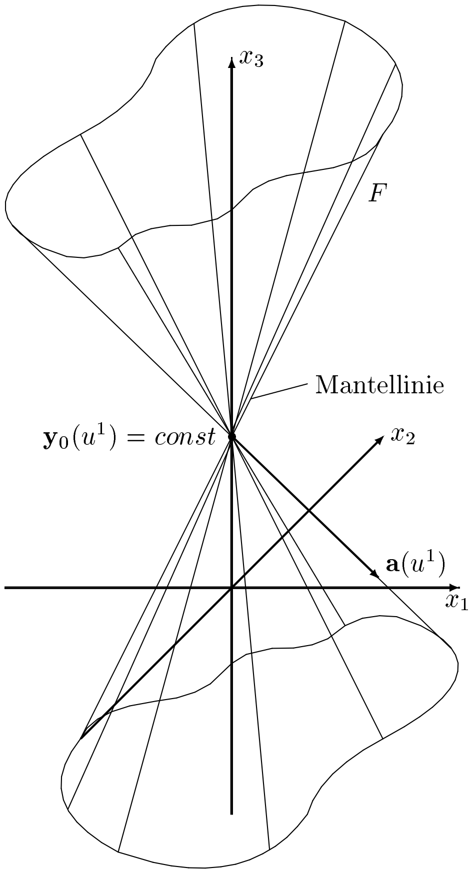
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ein horizontaler Schnitt $z = const$ (x-y-Ebene) ergibt einen Kreis, deren Gestalt von a definiert wird. Ein vertikaler Schnitt (z.B. in der x-z-Ebene $y = const$ oder y-z-Ebene $x = const$) ergeben Hyperbeln.
Eine Parameterdarstellung, die der Darstellung einer Regelfläche entspricht, hat z.B. die Gestalt

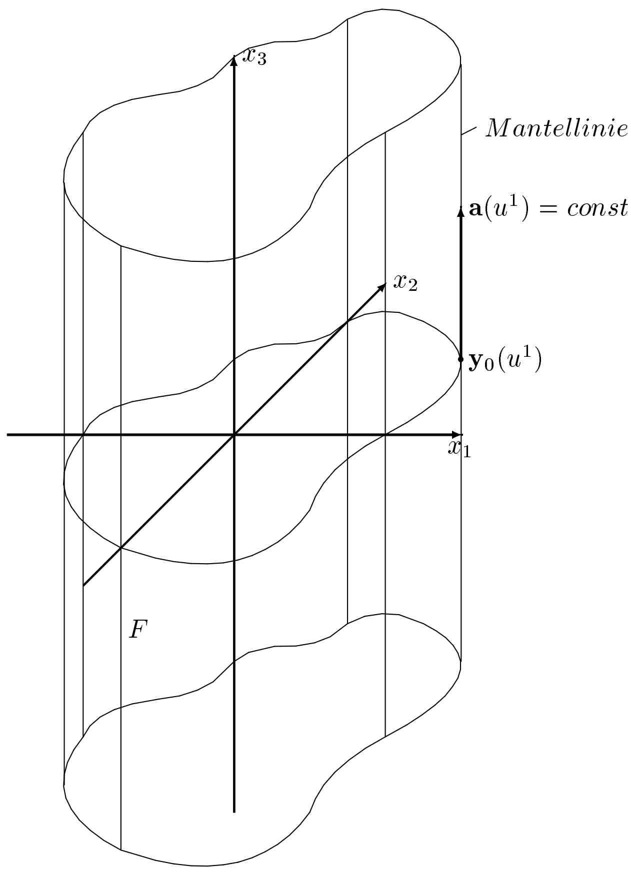
$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = \underbrace{\begin{pmatrix} a\cos(u^1) \\ a\sin(u^1) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}_0(u^1)} + u^2 \underbrace{\begin{pmatrix} -a\sin(u^1) \\ a\cos(u^1) \\ c \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}(u^1)}.$$

■

Kegelfläche



Zylinderfläche



Beispiel: Kegelfläche Aus der obigen Grafik ergibt sich für eine Kegelfläche eine Darstellung

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = \mathbf{y}_0 + u^2\mathbf{a}(u^1) \qquad \text{z.B. } \mathbf{x}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix} + u^2 \begin{pmatrix} x(u^1) \\ y(u^1) \\ -z_0 \end{pmatrix}$$

die der einer Regelfläche entspricht. Um die Zulässigkeit zu gewähren, sollte darauf geachtet werden, daß die Tangentialvektoren

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{x}_{,1} = u^2 \begin{pmatrix} \dot{x}(u^1) \\ \dot{y}(u^1) \\ 0 \end{pmatrix} = u^2\dot{\mathbf{a}}(u^1) \quad \text{und} \quad \mathbf{t}_2 = \mathbf{x}_{,2} = \begin{pmatrix} x(u^1) \\ y(u^1) \\ -z_0 \end{pmatrix} = \mathbf{a}(u^1)$$

linear unabhängig sind und somit auch die Vektoren $\mathbf{a}(u^1)$ und $\dot{\mathbf{a}}(u^1)$. Die Zulässigkeit kann natürlich nur gewährleistet werden, wenn $u^2 \neq 0$ ist, da der Nullvektor zu jedem anderen Vektor linear abhängig ist. Somit wird auch hier deutlich, daß die Kegelspitze ein besonderer Punkt der Fläche ist. Es ist der singuläre Punkt. ■

Beispiel: Zylinderfläche Ebenfalls ergibt sich für einen Zylinder aus der obigen Grafik eine Darstellung

$$\mathbf{x}(u^1,u^2) \quad = \quad \mathbf{y}_0(u^1) + u^2\mathbf{a} \qquad \text{z.B. } \mathbf{x}(u^1,u^2) = \begin{pmatrix} x(u^1) \\ y(u^1) \\ 0 \end{pmatrix} + u^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

die der einer Regelfläche entspricht. Um die Zulässigkeit zu gewähren, sollte darauf geachtet werden, daß die Tangentialvektoren

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{x}_{,1} = \begin{pmatrix} \dot{x}(u^1) \\ \dot{y}(u^1) \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{y}}_0(u^1) \quad \text{und} \quad \mathbf{t}_2 = \mathbf{x}_{,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \mathbf{a}$$

linear unabhängig sind. Dies kann überhaupt erst dann gewährleistet werden, wenn $\dot{\mathbf{x}}_0(u^1) \neq 0$. Weiterhin dürfen die Vektoren $\dot{\mathbf{x}}_0(u^1)$ und $\mathbf{a}$ nicht kolinear sein. ■

Bemerkung: Die geraden Koordinatenlinien $u^1 = const$ in den letzten beiden Beispielen werden als Mantellinien bezeichnet.

Beispiel: Die Tangentenfläche Ausgehend von einer (Raum-) Kurve Γ, die durch $\mathbf{y}_0(s = u^1)$ mit dem natürlichen Parameter $s = u^1$ beschrieben wird, wird eine Tangentenfläche durch die Vorschrift

$$\mathbf{x}(u^1,u^2) = \mathbf{y}_0(u^1) + u^2\, \underbrace{\mathbf{y}_0'(u^1)}_{\text{Tangentenvektor}}$$

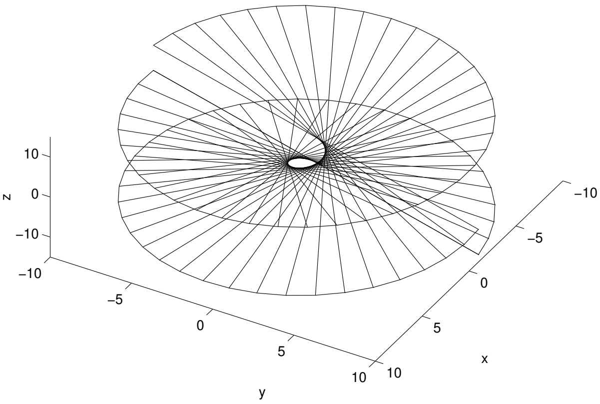
erzeugt. Daraus folgt, daß eine Tangentenfläche auch eine Regelfläche ist. Betrachtet man die Zulässigkeit dieser Parameterdarstellung, so muß man wiederum die lineare Abhängigkeiten der Tangentenvektoren

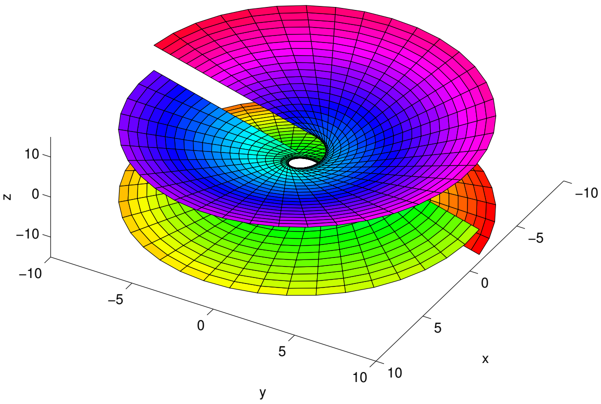
$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{x}_{,1} = \mathbf{y}_0'(u^1) + u^2\mathbf{y}_0''(u^1) \quad \text{und} \quad \mathbf{t}_2 = \mathbf{x}_{,2} = \mathbf{y}_0'(u^1)$$

untersuchen. Die beiden Tangentenvektoren sind linear unabhängig, und somit die Parameterdarstellung zulässig, wenn das Kreuzprodukt beider Tangentenvektoren von Null verschieden ist.

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2 &= \mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2} \\
&= (\mathbf{y}_0'(u^1) + u^2\mathbf{y}_0''(u^1)) \times \mathbf{y}_0'(u^1) \\
&= \underbrace{\mathbf{y}_0'(u^1) \times \mathbf{y}_0'(u^1)}_{=0} + u^2(\mathbf{y}_0''(u^1) \times \mathbf{y}_0'(u^1)) \\
&= u^2(\mathbf{y}_0''(u^1) \times \mathbf{y}_0'(u^1)) \\
&= u^2(k(u^1)\mathbf{n}(u^1) \times \mathbf{t}(u^1)) \\
&= u^2 k(u^1)\mathbf{b}(u^1)
\end{aligned}$$

Dabei ist $(\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{b})$ das begleitende Dreibein der Kurve $\mathbf{y}_0(u^1)$. Es ist ersichtlich, daß die Parameterdarstellung für $u^2 = 0$ nie zulässig ist, d.h. die Kurve $\mathbf{y}_0(u^1)$ selbst sind singuläre Punkte und wird als die Gratlinie bezeichnet. Außerdem ist die Parameterdarstellung nicht zulässig, wenn die Krümmung Null ist. Dann besteht die Gerade $\mathbf{y}_0(u^1) + u^2\mathbf{y}_0'(u^1)$ für dieses spezielle u^1 aus singulären Punkten. Kurven, deren Krümmung identisch Null ist, sind Geraden im Raum.
Die folgenden Grafiken zeigen die Tangentenfläche, welche aus der Schraubenlinie hervorgeht. Wobei die erste Grafik den Verlauf der Tangentengeraden verdeutlichen soll.





Definition 3.2.2 (Torse) *Eine Regelfläche heißt Torse, wenn die Tangentialebene in einem Punkt der erzeugenden Geraden* $G = \{\mathbf{y} \ : \ \mathbf{y}(\lambda) = \mathbf{y}_0(u^1) + \lambda \mathbf{a}(u^1); \ \lambda \in \mathbf{R}; \ u^1 = const\}$ *gleichzeitig Tangentialebene für alle Punkte von* G *ist.*

Bemerkung: Es gibt nur drei Typen von Torsen. Dies sind Zylinderflächen, Kegelflächen und Tangentialflächen. Die Ebene ist ein Spezialfall der Tangentialfläche.

Lemma 3.2.1 (Flächennormalenvektor einer Regelfläche) *Für eine Regelfläche*

$$F = \{\mathbf{x} \ : \ \mathbf{x}(u^1, u^2) = \mathbf{y}_0(u^1) + u^2 \mathbf{a}(u^1), \ \forall (u^1, u^2) \in \mathbf{I} \subset \mathbf{R}^2\}$$

folgt für den Flächennormalenvektor nach Definition 3.1.6

$$\mathbf{f} = \frac{(\dot{\mathbf{y}}_0 + u^2 \dot{\mathbf{a}}) \times \mathbf{a}}{|(\dot{\mathbf{y}}_0 + u^2 \dot{\mathbf{a}}) \times \mathbf{a}|} \quad \textit{wobei } \dot{\mathbf{y}}_0 = \frac{\delta \mathbf{y}_0(u^1)}{\delta u^1} \quad \textit{und } \dot{\mathbf{a}} = \frac{\delta \mathbf{a}(u^1)}{\delta u^1}.$$

Bemerkung: Da eine Torse entlang der Geraden $G = \{\mathbf{y} \ : \ \mathbf{y}(\lambda) = \mathbf{y}_0(u^1) + \lambda \mathbf{a}(u^1); \ \lambda \in \mathbf{R}; \ u^1 = const\}$ die selbe Tangentialebene besitzt, ist der Flächennormalenvektor der Fläche konstant entlang dieser Gerade, d.h. konstant gegenüber einer Änderung des Parameters u^2. Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial u^2} \mathbf{f} = 0 \ \Leftrightarrow \ [\dot{\mathbf{y}}_0, \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{a}] = 0 \ \Leftrightarrow \ F \text{ ist eine Torse.}$$

Dies gilt natürlich nur, wenn die Regelfläche in der entsprechenden Parameterdarstellung $\mathbf{x}(u^1, u^2) = \mathbf{y}_0(u^1) + u^2 \mathbf{a}(u^1)$ gegeben ist.

3.2.2 Röhrenflächen und der Torus

Wird anstelle einer Geraden, wie bei den Regelflächen, ein Kreis mit dem Radius $r > 0$, der in der Normalebene E_N (siehe Definition 2.5.2) liegt, entlang der Kurve Γ mit der Parameterdarstellung $\mathbf{y}_0(u^1 = s)$ transportiert, entsteht eine sogenannte Röhrenfläche. $u^1 = s$ sei dabei der natürliche Parameter der Kurve $\mathbf{y}_0(u^1 = s)$. Eine Röhrenfläche läßt sich somit durch die folgende Parameterdarstellung charakterisieren.

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = \mathbf{y}_0(u^1) + r(\mathbf{n}(u^1) \cos(u^2) + \mathbf{b}(u^1) \sin(u^2))$$

Aus der Kurventheorie läßt sich das begleitende Dreibein $(\mathbf{t}(u^1), \mathbf{n}(u^1), \mathbf{b}(u^1))$ der Kurve Γ, definiert durch $\mathbf{y}_0(u^1)$, nach den Vorschriften

$$\mathbf{t} = \mathbf{y}', \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{y}''}{|\mathbf{y}''|}, \qquad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{y}' \times \mathbf{y}''}{|\mathbf{y}' \times \mathbf{y}''|}$$

bestimmen. Bezüglich der Zulässigkeit der Parameterdarstellung der Röhrenfläche

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = \mathbf{y}_0(u^1) + r(\mathbf{n}(u^1)\cos(u^2) + \mathbf{b}(u^1)\sin(u^2))$$

müssen wiederum die Tangentialvektoren

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_1 = \mathbf{x}_{,1} &= \mathbf{y}_0' + r(\mathbf{n}'\cos(u^2) + \mathbf{b}'\sin(u^2)), \\
\mathbf{t}_2 = \mathbf{x}_{,2} &= r(-\mathbf{n}\sin(u^2) + \mathbf{b}\cos(u^2))
\end{aligned}$$

auf lineare Unabhängigkeit untersucht werden.

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_1 = \mathbf{x}_{,1} &= \mathbf{y}_0' + r(\mathbf{n}'\cos(u^2) + \mathbf{b}'\sin(u^2)) \\
&\qquad \text{aus den Frenetschen Formeln (2.4-5) folgt} \\
&= \mathbf{t} + r\cos(u^2)(-k\mathbf{t} + w\mathbf{b}) + r\sin(u^2)(-w\mathbf{n}) \\
&= \mathbf{t}(1 - kr\cos(u^2)) - \mathbf{n}(rw\sin(u^2)) + \mathbf{b}(rw\cos(u^2)) \\
\mathbf{t}_2 = \mathbf{x}_{,2} &= -\mathbf{n}(r\sin(u^2)) + \mathbf{b}(r\cos(u^2)) \\
\Rightarrow\ \mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2} &= (\mathbf{t}(1 - kr\cos(u^2)) - \mathbf{n}(rw\sin(u^2)) + \mathbf{b}(rw\cos(u^2))) \times (-\mathbf{n}(r\sin(u^2)) + \mathbf{b}(r\cos(u^2))) \\
&= -(1 - kr\cos(u^2))\ r\ \underbrace{(\mathbf{n}\cos(u^2) + \mathbf{b}\sin(u^2))}_{\text{hat die Länge } 1 \neq 0}
\end{aligned}$$

Da $r > 0$ und $k = k(u^1)$ ist demzufolge die Parameterdarstellung zulässig, genau dann wenn

$$k(u^1) r\cos(u^2) \neq 1 \text{ mit } u^1 \in \mathbf{I}, u^2 \in [0, 2\pi).$$

Da $\cos(u^2) \in [-1, 1]\ \forall u^2 \in [0, 2\pi)$ sollte der Radius r des Kreises so gewählt werden, daß

$$k(u^1)\ r < 1 \quad \forall u^1 \in I \ \Leftrightarrow\ r < 1/k(u^1)\ \forall u^1 \in \mathbf{I}.$$

Damit ist die generelle Zulässigkeit gewährleistet. Wie sich die Wahl des Radius r auf die Gestalt der Röhrenfläche auswirkt soll am folgenden Beispiel demonstriert werden.

Beispiel: Torus $\mathbf{y}_0$ ist ein Kreis in der x_1-x_2-Ebene.

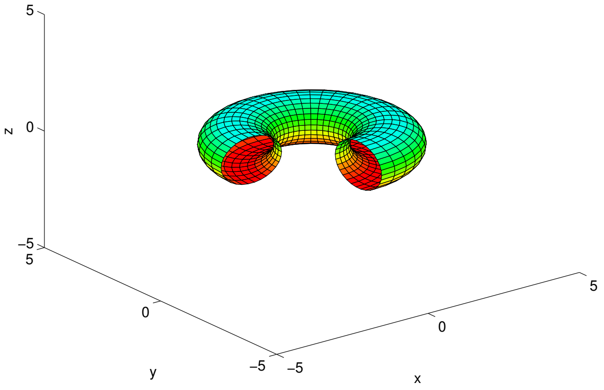
$$\mathbf{y}_0(u^1) = \begin{pmatrix} R\cos(u^1) \\ R\sin(u^1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } u^1 \in [0, 2\pi)$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{n}(u^1) = -\frac{\mathbf{y}_0''}{|\mathbf{y}_0''|} = \begin{pmatrix} -\cos(u^1) \\ -\sin(u^1) \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}(u^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

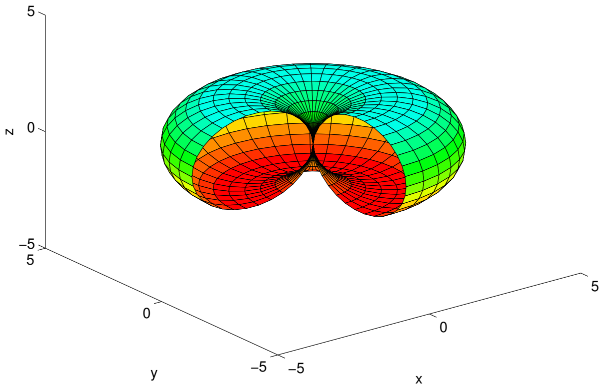
$$\Rightarrow \quad \mathbf{x}(u^1, u^2) = \underbrace{\begin{pmatrix} R\cos(u^1) \\ R\sin(u^1) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}_0} + r\cos(u^2) \underbrace{\begin{pmatrix} -\cos(u^1) \\ -\sin(u^1) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{n}} + r\sin(u^2) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Notwendig für die Zulässigkeit der Parameterdarstellung, ist

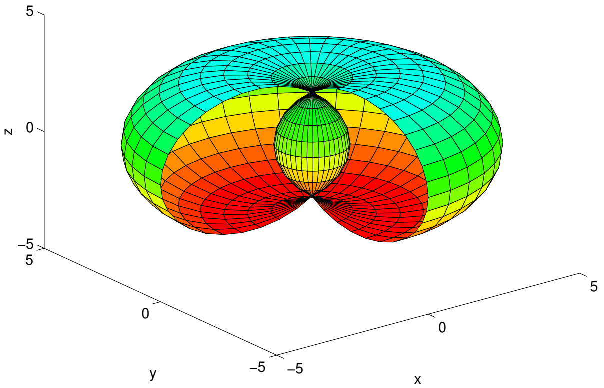
- $r < R = 1/k_{Kreis}$. Sonst gibt es für
- $r = R$ einen singulären Punkt im Ursprung oder für
- $r > R$ läuft der Torus in sich selbst, d.h. im Inneren wird um den Ursprung eine Sphäre beschrieben.



$(\mathbf{r = 1}) < (\mathbf{2 = R})$



$(\mathbf{r = 2}) = (\mathbf{2 = R})$



$(\mathbf{r = 3}) > (\mathbf{2 = R})$

3.3 Bogen-, Oberflächenelemente und 1. metrische Fundamentalgröße

Es wird eine Fläche F betrachtet, die durch die zulässige Parameterdarstellung

$$F = \{\mathbf{x} :\ \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2),\ (u^1, u^2) \in \mathbf{I}\}$$

beschrieben wird. Weiterhin seien die Parameter $u^i = u^i(t),\ i = 1, 2,\ t \in \mathbf{T}$ Funktionen in Abhängigkeit des Parameters t und r-mal stetig differenzierbar, d.h. $u^i(t) \in \mathbf{C}^r(\mathbf{T})$. Demzufolge liegt die Kurve

$$\Gamma = \{\mathbf{y} :\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(u^1(t), u^2(t));\ t \in \mathbf{T}\}$$

in der Fläche F. Ausgehend von der Definition eines Bogenelementes (siehe (2.2-2))

$$ds = |\dot{\mathbf{y}}(t)|dt$$

bestimmt sich ein Bogenelement einer Flächenkurve Γ durch

$$ds = \sqrt{\underline{\dot{u}}^T \mathbf{G}\ \underline{\dot{u}}}\ dt, \tag{3.3-1}$$

da für $\dot{\mathbf{y}}(t)$ die folgende Beziehung gilt.

$$\dot{\mathbf{y}}(t) \quad = \quad \mathbf{x}_{,i}\dot{u}^i \qquad \text{man beachte die Einsteinsche Summenkonvention}$$

$$\Rightarrow \quad |\dot{\mathbf{y}}(t)|^2 = (\mathbf{x}_{,i}\dot{u}^i \ , \ \mathbf{x}_{,j}\dot{u}^j) = \underbrace{(\mathbf{x}_{,i} \ , \ \mathbf{x}_{,j})}_{g_{ij}} \dot{u}^i\dot{u}^j = g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j$$

$$= \underline{\dot{u}}^T\mathbf{G}\underline{\dot{u}} \qquad \text{mit } \underline{u} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

Durch den Unterstrich soll der Unterschied zwischen Vektoren der Parameterebene, z.B. $\underline{u}$ oder $\underline{v}$, und Vektoren des euklidischen Vektorraumes, in diesem Fall der $\mathbf{R}^3$, z.B. Vektoren einer Kurve $\mathbf{y}$ oder einer Fläche $\mathbf{x}$, verdeutlicht werden.

Definition 3.3.1 (1. metrische Fundamentalgröße) *Die Matrix*

$$\mathbf{G} = (g_{ij})_{ij=1}^2 \quad \textit{mit} \quad g_{ij} = (\mathbf{x}_{,i} \ , \ \mathbf{x}_{,j})$$

wird als 1. metrische Fundamentalgröße bezeichnet.

Folgerung: Ist die Fläche F in einer Gaußschen Parametrisierung gegeben, d.h. $\mathbf{x}_{,1} \perp \mathbf{x}_{,2}$, so hat die erste metrische Fundamentalgröße Diagonalgestalt, da

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{x}_{,1},\mathbf{x}_{,1}) & (\mathbf{x}_{,1},\mathbf{x}_{,2}) \\ (\mathbf{x}_{,2},\mathbf{x}_{,1}) & (\mathbf{x}_{,2},\mathbf{x}_{,2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{x}_{,1},\mathbf{x}_{,1}) & 0 \\ 0 & (\mathbf{x}_{,2},\mathbf{x}_{,2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Die erste metrische Fundamentalgröße $\mathbf{G}$ ist unabhängig von der gewählten Kurve Γ, sondern hängt nur von dem Flächenpunkt ab.

Lemma 3.3.1 (Eigenschaften der Matrix G) *1) Die Matrix $\mathbf{G} = (g_{ij})_{i,j=1}^2$ ist symmetrisch und positiv definit.*
2) $det(\mathbf{G}) = |\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}|^2$

Beweis: 1) $\quad \underline{v}^T\mathbf{G}\underline{v} = g_{ij}v^iv^j = (\mathbf{x}_{,i} \ , \ \mathbf{x}_{,j})v^iv^j = (\mathbf{x}_{,i}v^i \ , \ \mathbf{x}_{,j}v^j) = |\mathbf{x}_{,i}v^i|^2 \geq 0 \ \forall \underline{v} \in \mathbf{R}^2$

Da die gewählte Parameterdarstellung als zulässig vorausgesetzt wurde, sind die Tangentenvektoren $\mathbf{t}_i = \mathbf{x}_{,i}, \ i = 1, 2$ linear unabhängig. Daraus folgt, daß

$$(\mathbf{x}_{,i}v^i \ , \ \mathbf{x}_{,j}v^j) \neq 0 \ \forall \underline{v} \in \mathbf{R}^2 \ \underline{v} \neq 0. \qquad \text{(Einsteinsche Summenkonvention)}$$

Und daraus folgt

$$\underline{v}^T\mathbf{G}\underline{v} > 0 \ \forall \underline{v} \in \mathbf{R}^2 \ \underline{v} \neq 0,$$

womit die positive Definitheit gezeigt ist.

2) $det(\mathbf{G}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = |\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}|^2$ folgt aus der Lagrangeschen Identität (1.1-2).

Folgerung: 1) Aus der positiven Definitheit folgt sofort die Regularität von $\mathbf{G}$ und somit die Invertierbarkeit.
2)Mit dem Wissen der Gestalt der Matrix $\mathbf{G}$ und somit der ersten metrischen Fundamentalgröße sind weitere Grundprobleme lösbar.

3.3.1 Bogenlänge von Flächenkurven aus 1. metrischer Fundamentalgröße

Ausgehend von den Überlegungen des letzten Abschnittes, läßt sich die folgende Definition formulieren.

Definition 3.3.2 (Bogenlänge und Bogenelemente von Flächenkurven) *Die Bogenlänge einer Flächenkurve* $\Gamma = \{\mathbf{y} : \ \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(u^1(t), u^2(t)); \ t \in \mathbf{T}\}$ *auf einer Fläche* $F = \{\mathbf{x} : \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2), \ (u^1, u^2) \in \mathbf{I}\}$ *ausgehend von einem festen Punkt* $\mathbf{y}(a) = \mathbf{x}(u^1(a), u^2(a))$ *bis* $\mathbf{y}(t)) = \mathbf{x}(u^1(t), u^2(t))$ *bestimmt sich durch*

$$s = \int_0^t ds = \int_0^t \sqrt{\underline{\dot{u}}^T \mathbf{G} \underline{\dot{u}}} \ dt. \tag{3.3-2}$$

Wie bereits aus (3.3-1) hervorgeht läßt sich ein Bogenelement dieser Kurve Γ *definieren durch*

$$ds = \sqrt{\underline{\dot{u}}^T \mathbf{G} \ \underline{\dot{u}}} \ dt. \tag{3.3-3}$$

3.3.2 Schnittwinkel von Teilkurven aus 1. metrischer Fundamentalgröße

Der Schnittwinkel von zwei Teilkurven $\Gamma_k = \{\mathbf{y}_k : \ \mathbf{y}_k(t) = \mathbf{x}(u_k^1(t), u_k^2(t)); \ t \in \mathbf{T}\}$ mit $\underline{u}_k = (u_k^1, u_k^2)^T, \ k = 1, 2$ auf der Fläche $F = \{\mathbf{x} : \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2), \ (u^1, u^2) \in \mathbf{I}\}$, die sich in dem festen Flächenpunkt $\mathbf{x}_0$ schneiden, soll betrachtet werden. O.B.d.A. soll gelten

$$\underline{u}_1(t=0) = \underline{u}_2(t=0) \ \Rightarrow \ \mathbf{y}_1(t=0) = \mathbf{y}_2(t=0) = \mathbf{x}_0 \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2.$$

Der Schnittwinkel dieser beiden Kurven ist definiert durch den Winkel zwischen den Tangentialvektoren $\mathbf{t}_k = \dot{\mathbf{y}}_k(0), \ k = 1, 2$ beider Kurven, für die aus den Eigenschaften des Skalarproduktes (siehe Seite 10) die Beziehung

$$\cos(\sphericalangle(\Gamma_1, \Gamma_2)) = \frac{(\dot{\mathbf{y}}_1(0), \dot{\mathbf{y}}_2(0))}{|\dot{\mathbf{y}}_1(0)| \ |\dot{\mathbf{y}}_2(0)|}$$

folgt. Es gilt

$$\dot{\mathbf{y}}_k = \mathbf{x}_{,j} u_k^j, \ k = 1, 2 \qquad \text{(Einsteinsche Summenkonvention)}$$

$$\Rightarrow \quad (\dot{\mathbf{y}}_1, \dot{\mathbf{y}}_2) = (\mathbf{x}_{,i} u_1^i, \mathbf{x}_{,j} u_2^j) = u_1^i (\mathbf{x}_{,i}, \mathbf{x}_{,j}) u_2^j = \dot{u}_1^i g_{ij} \dot{u}_2^j = \underline{\dot{u}}_2^T \mathbf{G} \underline{\dot{u}}_1,$$

$$\Rightarrow \quad |\dot{\mathbf{y}}_k|^2 = \underline{\dot{u}}_k^T \mathbf{G} \underline{\dot{u}}_k, \qquad k = 1, 2$$

Der Schnittwinkel zweier Kurven auf eine Fläche bestimmt sich somit durch

$$\cos(\sphericalangle(\Gamma_1, \Gamma_2)) = \frac{\underline{\dot{u}}_2^T \mathbf{G} \underline{\dot{u}}_1}{\sqrt{\underline{\dot{u}}_1^T \mathbf{G} \underline{\dot{u}}_1} \ \sqrt{\underline{\dot{u}}_2^T \mathbf{G} \underline{\dot{u}}_2}}.$$

Betrachtung: Betrachtet man den Schnittwinkel der Koordinatenlinien mit

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} t \\ c_1 \end{pmatrix}, \ \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} c_2 \\ t \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \underline{\dot{u}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{\dot{u}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\cos(\sphericalangle(\Gamma_1, \Gamma_2)) = \frac{g_{12}(t)}{\sqrt{g_{11}(t)} \sqrt{g_{22}(t)}}.$$

$\blacksquare$

Bemerkung: Für den Fall, daß $g_{12}(t) = g_{21}(t) = 0, \ \forall t \in \mathbf{T}$ schneiden sich die Koordinatenlinien senkrecht und die angegebene Parametrisierung entspricht der Gaußschen Parametrisierung. Insbesondere gilt das

Lemma 3.3.2 (Hinreichende und notwendige Bedingung der Gaußschen Parametrisierung) *Die Parameterdarstellung $\mathbf{x}(u^1, u^2)$ der Kurve Γ entspricht genau dann der Gaußschen Parametrisierung, wenn die erste matrische Fundamentalgröße $\mathbf{G}$ von diagonaler Gestalt für alle $(u^1, u^2) \in \mathbf{I}$ ist.*

3.3.3 Flächeninhalte aus 1. metrischer Fundamentalgröße

Auf einer Fläche

$$F = \{\mathbf{x}: \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2), \ (u^1, u^2) \in \mathbf{I}\}$$

soll ein differentiell kleines Flächenstück

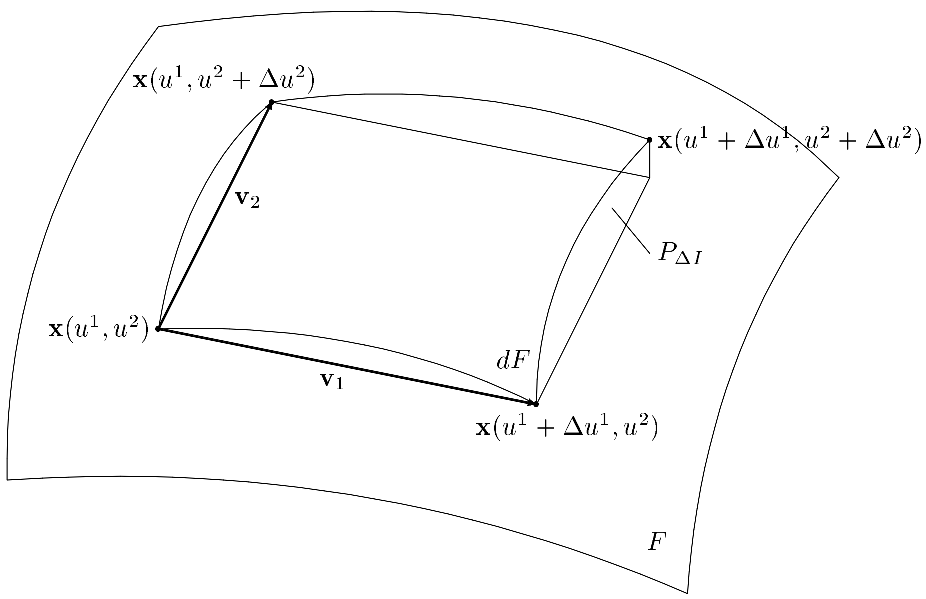
$$dF = \{\mathbf{x}: \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2), \ (u^1, u^2) \in \Delta\mathbf{I} = [u^1, u^1 + \Delta u^1] \times [u^2, u^2 + \Delta u^2] \subset \mathbf{R}^2\}$$

untersucht werden. Sind die $\Delta u^i > 0, \ i = 1, 2$ ausreichend klein, so entspricht der Flächeninhalt des Flächenstückes dF etwa dem des Parallelogramms $P_{\Delta I}$, welches durch die Vektoren

$$\underline{v}_1 = \mathbf{x}(u^1 + \Delta u^1, u^2) - \mathbf{x}(u^1, u^2) \approx \Delta u^1 \ \mathbf{x}_{,1}(u^1, u^2)$$

$$\underline{v}_2 = \mathbf{x}(u^1, u^2 + \Delta u^2) - \mathbf{x}(u^1, u^2) \approx \Delta u^2 \ \mathbf{x}_{,2}(u^1, u^2)$$

aufgespannt wird. Die Approximation der letzten Gleichungen ergibt sich aus der Taylorentwicklung.



Für den Flächeninhalt dA_F des Flächenstückes dF und den Flächeninhalt $A_{P_{\Delta I}}$ des Parallelogramms $P_{\Delta I}$ gilt mit $\underline{u} = (u^1, u^2)^T$

$$\frac{dA_F}{du^1 du^2} = \lim_{\substack{\Delta u^1 \to 0 \\ \Delta u^2 \to 0}} \frac{A_{P_{\Delta I}}}{\Delta u^1 \ \Delta u^2}. \qquad (3.3\text{-}4)$$

Mit

$$\begin{aligned} dA_F \approx A_{P_{\Delta I}} &= |\underline{v}_1 \times \underline{v}_2| \\ &= |\Delta u^1 \ \mathbf{x}_{,1}(u^1, u^2) \times \Delta u^2 \ \mathbf{x}_{,2}(u^1, u^2)| \\ &= |\mathbf{x}_{,1}(u^1, u^2) \times \mathbf{x}_{,2}(u^1, u^2)| \ \Delta u^1 \Delta u^2 \end{aligned}$$

folgt nach dem Grenzübergang $\Delta u^i \to 0,\ i = 1, 2$

$$P_{\Delta I} \to dF \qquad \Rightarrow \qquad A_{P_{\Delta I}} \to dA_F$$

wegen (3.3-4)

$$\begin{aligned}
\frac{dA_F}{du^1 du^2} &= \lim_{\substack{\Delta u^1 \to 0 \\ \Delta u^2 \to 0}} \frac{A_{P_{\Delta I}}}{\Delta u^1\ \Delta u^2} = \lim_{\substack{\Delta u^1 \to 0 \\ \Delta u^2 \to 0}} \frac{|\mathbf{x}_{,1}(u^1,u^2) \times \mathbf{x}_{,2}(u^1,u^2)|\ \Delta u^1 \Delta u^2}{\Delta u^1\ \Delta u^2} \\
&= |\mathbf{x}_{,1}(u^1,u^2) \times \mathbf{x}_{,2}(u^1,u^2)| = \sqrt{((\mathbf{x}_{,1}(u^1,u^2) \times \mathbf{x}_{,2}(u^1,u^2)), (\mathbf{x}_{,1}(u^1,u^2) \times \mathbf{x}_{,2}(u^1,u^2)))}
\end{aligned}$$

nach der Lagrangen Identität (1.1-2) und der Definition (3.3.1) der ersten metrischen Fundamentalgröße $\mathbf{G}$ folgt

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{det\ \mathbf{G}} \\
\Rightarrow dA_F &= \sqrt{det\ \mathbf{G}}\ du^1 du^2. \qquad (3.3\text{-}5)
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für den Flächeninhalt A_F der Fläche F die Gleichung

$$A_F = \int_F dA_F = \iint_{\mathbf{I}} \sqrt{det\ \mathbf{G}}\ du^1 du^2.$$

Beispiel: Torus

$$\mathbf{x}(u^1,u^2) = \begin{pmatrix} R\cos(u^1) + r\cos(u^2)\cos(u^1) \\ R\sin(u^1) + r\cos(u^2)\sin(u^1) \\ r\sin(u^2) \end{pmatrix}, \qquad (u^1,u^2) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi] = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{x}_{,1}(u^1,u^2) = \begin{pmatrix} -R\sin(u^1) - r\cos(u^2)\sin(u^1) \\ R\cos(u^1) + r\cos(u^2)\cos(u^1) \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{x}_{,2}(u^1,u^2) = \begin{pmatrix} -r\sin(u^2)\cos(u^1) \\ -r\sin(u^2)\sin(u^1) \\ r\cos(u^2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} (R + r\cos(u^2))^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$$dA_{F_{\Delta I}} = \sqrt{det\mathbf{G}}\ du^1\ du^2 = r(R + \cos(u^2))\ du^1\ du^2$$

Damit ergibt sich als Oberflächeninhalt des Torus

$$\begin{aligned}
A_F = A_{Torus} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R + \cos(u^2))\ du^1\ du^2 \\
&= 2\pi r \int_0^{2\pi} R + \cos(u^2)\ du^2 \\
&= 2\pi r\ R\ 2\pi + (2\pi r^2 \sin(u^2))\Big|_0^{2\pi} \\
&= 4\pi^2 r\ R
\end{aligned}$$

■

3.4 Krümmungstheorie der Flächen - 2. metrische Fundamentalgröße

3.4.1 Normalkrümmung, geodätische Krümmung und 2. metrische Fundamentalgröße

Es soll eine Fläche F betrachtet werden, die durch die Parameterdarstellung

$$F = \{\mathbf{x} : \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2), \ (u^1, u^2) \in \mathbf{I}\}$$

definiert ist. In dieser Fläche liege die Kurve

$$\Gamma = \{\mathbf{y} : \ \mathbf{y}(s) = \mathbf{x}(u^1(s), u^2(s)), \ s \in \mathbf{S}\}.$$

Der Parameter s sei so gewählt, daß er dem natürlichen Parameter der Kurve Γ entspricht. Es sei $\underline{u}(s) = (u^1(s), u^2(s))^T$ und $\mathbf{n}$ bezeichne den Normalenvektor der Kurve und $\mathbf{f}$ den der Fläche. Es gilt folgendes.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(s) &= u^{i'}\mathbf{x}_{,i} = \mathbf{t}(s) \qquad \text{(Einsteinsche Summenkonvention)} \\ \mathbf{y}''(s) &= u^{i''}\mathbf{x}_{,i} + u^{i'}u^{j'}\mathbf{x}_{,ij} = k(s)\mathbf{n}(s) \qquad \text{Krümmungsvektor} \end{aligned} \tag{3.4-1}$$

Für den Krümmungsvektor läßt sich natürlich auch eine lokale Darstellung im Koordinatensystem, welches durch das begleitende Dreibein $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{f})$ aufgespannt wird, angeben.

$$\mathbf{y}''(s) = k_n(s)\mathbf{f}(s) + k_g(s) \ \underbrace{(l_1(s)\mathbf{t}_1(s) + l_2(s)\mathbf{t}_2(s))}_{\mathbf{e(s)}} \tag{3.4-2}$$

$k_n(s)$ und $k_g(s)$ sind dabei eindeutig festgelegte Koeffizienten, wenn $|\mathbf{e}| = 1$ normiert ist.
Es ist anzumerken, daß der Flächennormalenvektor $\mathbf{f}$ unabhängig von der Kurve Γ ist. Er ist durch den Flächenpunkt eindeutig gegeben. Der tangentiale Vektor $\mathbf{e}$ hingegen ist von der Kurve abhängig.
Aus Lemma 1.3.1 bzw. aus (2.2-5) geht hervor, daß die Vektoren $\mathbf{y}'(s)$ und $\mathbf{y}''(s)$ senkrecht aufeinander stehen, da $\mathbf{y}'(s)$ parallel zum Tangentialvektor und $\mathbf{y}''(s)$ parallel zum Hauptnormalenvektor der Kurve sind.

$$(\mathbf{y}'(s), \mathbf{y}''(s)) = 0 \ \Rightarrow \quad \underbrace{(\mathbf{y}'(s), k_n(s)\mathbf{f}(s))}_{=0, \mathbf{y}'(s) = \mathbf{t}(s) \in span(\mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,2})} \quad + (\mathbf{y}'(s), k_g(s)\mathbf{e}(s)) = 0$$

Dies zeigt, daß $\mathbf{e}(s)$ nicht nur in der Tangentialebene liegt, sondern, daß er ebenfalls orthogonal zum Tangentenvektor der Kurve Γ ist. $(\mathbf{e}(s), \mathbf{f}(s), \mathbf{y}'(s))$ bilden ein Rechtssystem. Demnach soll der Vektor $\mathbf{e}(s)$ durch

$$\mathbf{e}(s) = \mathbf{f}(s) \times \mathbf{y}'(s)$$

definiert werden.

Definition 3.4.1 (Normalkrümmung und geodätische Krümmung) *Die Koeffizienten $k_n(s)$ und $k_g(s)$ der Gleichung (3.4-2) werden als*

- *Normalkrümmung $k_n(s)$, welche die Krümmung der Fläche entlang der Kurve, also eingebettet im 3D-Raum, verkörpert, und*
- *geodätische Krümmung $k_g(s)$, welche die Krümmung der Kurve Γ in der Fläche F selbst, also eingebettet in einer 2D-Mannigfaltigkeit, verkörpert, bezeichnet.*

(siehe [Bronst])

Lemma 3.4.1 (Zusammenhang zwischen der Krümmung einer Kurve und derer einer Fläche)

$$k(s)^2 = k_n(s)^2 + k_g(s)^2$$

Beweis: In diesem Beweis soll die Normalenvektor der Kurve mit $\mathbf{n}(s)$ und der der Fläche mit $\mathbf{f}(s)$ bezeichnet werden.

$$\begin{aligned}
k(s)\mathbf{n}(s) &= \mathbf{y}''(s) = k_n(s)\mathbf{f}(s) + k_g(s)\mathbf{e}(s) \\
(k(s)\mathbf{n}(s), k(s)\mathbf{n}(s)) &= (k_n(s)\mathbf{f}(s) + k_g(s)\mathbf{e}(s), k_n(s)\mathbf{f}(s) + k_g(s)\mathbf{e}(s)) \\
(k(s)\mathbf{n}(s), k(s)\mathbf{n}(s)) &= (k_n(s)\mathbf{f}(s), k_n(s)\mathbf{f}(s)) + 2\underbrace{(k_n(s)\mathbf{f}(s), k_g(s)\mathbf{e}(s))}_{=0;\ \mathbf{f}\perp\mathbf{e}} + (k_g(s)\mathbf{e}(s), k_g(s)\mathbf{e}(s)) \\
k(s)^2\underbrace{||\mathbf{n}(s)||^2}_{=1} &= k_n(s)^2\underbrace{||\mathbf{f}(s)||^2}_{=1} + k_g(s)^2\underbrace{||\mathbf{e}(s)||^2}_{=1} \\
k(s)^2 &= k_n(s)^2 + k_g(s)^2
\end{aligned}$$

Betrachtung: Im weiteren soll vorerst die Normalkrümmung untersucht werden.

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}''(s) &= k_n(s)\mathbf{f}(s) + k_g(s)\mathbf{e}(s) \\
(\mathbf{y}''(s), \mathbf{f}(s)) &= k_n(s)\underbrace{(\mathbf{f}(s), \mathbf{f}(s))}_{=||\mathbf{f}||^2=1} + k_g(s)\underbrace{(\mathbf{e}(s), \mathbf{f}(s))}_{=0;\ \mathbf{e}\perp\mathbf{f}} \\
\Rightarrow (\mathbf{y}''(s), \mathbf{f}(s)) &= k_n(s)
\end{aligned}$$

Demnach ergibt sich für die Normalkrümmung

$$\begin{aligned}
k_n(s) &= (\mathbf{y}''(s), \mathbf{f}(s)) \qquad \text{nach (3.4-1) folgt} \\
&= ({u^i}''(s)\mathbf{x}_{,i}(s) + {u^i}'(s){u^j}'(s)\mathbf{x}_{,ij}(s), \mathbf{f}(s)) \\
&= \underbrace{({u^i}''(s)\mathbf{x}_{,i}(s), \mathbf{f}(s))}_{=0;\ \mathbf{x}_{,1}(s)=\mathbf{t}_1(s)\perp\mathbf{f}(s)} + ({u^i}'(s){u^j}'(s)\mathbf{x}_{,ij}(s), \mathbf{f}(s)) \\
&= {u^i}'(s){u^j}'(s)\underbrace{(\mathbf{x}_{,ij}(s), \mathbf{f}(s))}_{=l_{ij}(s)}.
\end{aligned}$$

$$k_n(s) = \underline{u}'^T(s)\mathbf{L}(s)\underline{u}'(s) \qquad \text{mit } \mathbf{L}(s) = (l_{ij}(s))_{i,j=1}^2 \tag{3.4-3}$$

Andererseits ergibt sich bzgl. der geodätischen Krümmung die folgende Überlegung.

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}''(s) &= k_n(s)\mathbf{f}(s) + k_g(s)\mathbf{e}(s) \\
(\mathbf{y}''(s), \mathbf{e}(s)) &= k_n(s)\underbrace{(\mathbf{f}(s), \mathbf{e}(s))}_{=0;\ \mathbf{f}\perp\mathbf{e}} + k_g(s)\underbrace{(\mathbf{e}(s), \mathbf{e}(s))}_{=||\mathbf{e}||^2=1}
\end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{e}(s) = \mathbf{f}(s) \times \mathbf{y}'(s)$$

folgt für die geodätische Krümmung eine Berechnungsvorschrift

$$k_g(s) = (\mathbf{y}''(s), \mathbf{f}(s) \times \mathbf{y}'(s)) = [\mathbf{f}(s), \mathbf{y}'(s), \mathbf{y}''(s)]. \tag{3.4-4}$$

Auf Eigenschaften der geodätischen Krümmung und daraus resultierende Folgerungen wird im Abschnitt 3.6 eingegangen. ■

Definition 3.4.2 (2. metrische Fundamentalgröße) *Die Größe (Matrix)*

$$\mathbf{L}(s) = (l_{ij}(s))_{i,j=1}^2 = ((\mathbf{x}_{,ij}(s), \mathbf{f}(s)))_{i,j=1}^2$$

wird als 2. metrische Fundamentalgröße der Fläche F bezeichnet.

Folgerung: Da nach dem Satz von Schwarz der Wert der partiellen Ableitungen $\mathbf{x}_{,ij}$, unter den gegebenen Voraussetzungen, nicht von der Differentationsreihenfolge abhängt, gilt somit

$$\mathbf{x}_{,ij} = \mathbf{x}_{,ji}.$$

Demzufolge ist die zweite metrische Fundamentalgröße $\mathbf{L}$, analog zur ersten metrischen Fundamentalgröße $\mathbf{G}$, symmetrisch. Die positive Definitheit kann jedoch nicht gezeigt werden.

Betrachtung:

$$(\mathbf{f}, \mathbf{x}_{,i}) = 0; \; \mathbf{f} \perp \mathbf{x}_{,i}$$

Nach Differentation nach u^j folgt

$$(\mathbf{f}_{,j}, \mathbf{x}_{,i}) + \underbrace{(\mathbf{f}, \mathbf{x}_{,ij})}_{l_{ij}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad l_{ij} = (\mathbf{f}, \mathbf{x}_{,ij}) = -(\mathbf{f}_{,j}, \mathbf{x}_{,i}) = -(\mathbf{f}_{,i}, \mathbf{x}_{,j}); \quad \text{da } l_{ij} \text{ symmetrisch}$$

■

Betrachtung: Es ist ersichtlich, daß für einen festen Flächenpunkt $\mathbf{x}(u^1, u^2)$, durch den die Kurve Γ führt, die zweite metrische Fundamentalgröße L der Fläche F fest also nur vom Flächenpunkt $\mathbf{x}(u^1, u^2)$ abhängig ist. D.h. in einem festen Flächenpunkt hängt die Normalkrümmung nur von der Tangentialrichtung der Kurve Γ ab, die diesen Punkt durchläuft (via $\underline{u}'$).
Zwei Kurven

$$\Gamma_k = \{\mathbf{y}_k : \; \mathbf{y}_k(s) = \mathbf{x}(u_k^1(s), u_k^2(s)), \; s \in \mathbf{S}\} \qquad k = 1, 2 \;,$$

die auf der Fläche F mit der zulässigen Parameterdarstellung

$$F = \{\mathbf{x} : \; \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2), \; (u^1, u^2) \in \mathbf{I}\}$$

liegen und o.B.d.A. einen Schnittpunkt bei $s = 0$ im Raumpunkt $\mathbf{y}_1(0) = \mathbf{y}_2(0)$, d.h. $\underline{u}_1(0) = \underline{u}_2(0)$ mit $\underline{u}_k(0) = (u_k^1, u_k^2)^T$, $k = 1, 2$ besitzen, haben die gleiche Normalkrümmung, wenn die Tangentenvektoren $\mathbf{y}_k'(0)$, $k = 1, 2$ beider Kurven, welche sich durch die Vorgabe einer Richtung $\underline{v} \in \mathbf{R}^2$ mittels

$$\mathbf{y}_k'(0) = \mathbf{X}'(0)\underline{v} \qquad \text{wobei} \qquad \mathbf{X}'(0) = (\mathbf{x}_{,1}(0), \mathbf{x}_{,2}(0)) \in \mathbf{R}^{3\times 2} \tag{3.4-5}$$

bestimmen lassen, im Schnittpunkt identisch sind.

$$\mathbf{y}_1'(0) = \mathbf{X}'(0)\underline{u}_1'(0) = \mathbf{X}'(0)\underline{u}_2'(0) = \mathbf{y}_2'(0)$$

Daraus folgt $\underline{u}_1'(0) = \underline{u}_2'(0)$ da $\mathbf{x}_{,1}(0), \mathbf{x}_{,2}(0)$ stets linear unabhängig sind, und demzufolge gilt für die Normalkrümmung

$$k_{nk} = \underline{u'}_k^T(s)\mathbf{L}(s)\underline{u'}_k(s)\Big|_{s=0} = \underline{u'}_k^T(0)\ \mathbf{L}(s)|_{s=0}\ \underline{u'}_k(0), \qquad k = 1, 2$$

$$\text{mit } \underline{u}_1'(0) = \underline{u}_2'(0) \text{ folgt}$$

$$k_{n1} = k_{n2}.$$

■

3.4.2 Problem der extremalen Normalkrümmung

Es soll die Fläche

$$F = \{\mathbf{x} :\ \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2),\ (u^1, u^2) \in \mathbf{I}\}$$

im Flächenpunkt $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(u_0^1, u_0^2)$ auf die Richtung $\mathbf{v} = (v^1, v^2)^T$ mit extremaler Normalkrümmung untersucht werden. Es ist bekannt, daß die Normalkrümmung in dem festen Flächenpunkt $\mathbf{x}_0$ nur von dem Tangentialvektor einer diesen Punkt durchlaufenden Kurve abhängt. Aus diesem Grund muß nur dieser Tangentialvektor, unabhängig von der speziell gewählten Kurve, variiert werden, wobei dieser so gewählt werden soll, daß er aus einer Parameterdarstellung, einer Kurve

$$\Gamma = \{\mathbf{y} :\ \mathbf{y}(s) = \mathbf{x}(u^1(s), u^2(s)),\ s \in \mathbf{S}\},$$

hervorgeht, in der der Parameter s der natürliche Parameter ist und $|\mathbf{y}'(s)|^2 = 1$ sein soll. Es muß demnach gelten

$$|\mathbf{y}'(s)|^2 = |u^{i'}\mathbf{x}_{,i}|^2 = u^{i'}u^{j'}(\mathbf{x}_{,i}, \mathbf{x}_{,j}) = \underline{u}'^T\mathbf{G}\underline{u}' = 1.$$

Für die extremale Normalkrümmung ergibt sich demnach die Beziehung

$$\left.\begin{aligned} k_{nmin} &= \min_{\forall \underline{u}:\ \underline{u}'^T\mathbf{G}\underline{u}'=1} \mathbf{u}'^T\mathbf{L}\underline{u}' \\[2ex] k_{nmax} &= \max_{\forall \underline{u}:\ \underline{u}'^T\mathbf{G}\underline{u}'=1} \mathbf{u}'^T\mathbf{L}\underline{u}' \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} k_{nmin} &= \min_{\forall \underline{v}\neq 0} \frac{\underline{v}^T\mathbf{L}\underline{v}}{\underline{v}^T\mathbf{G}\underline{v}} \\[2ex] k_{nmax} &= \max_{\forall \underline{v}\neq 0} \frac{\underline{v}^T\mathbf{L}\underline{v}}{\underline{v}^T\mathbf{G}\underline{v}} \end{aligned}\right. .$$

■

Definition 3.4.3 (Hauptkrümmung) *Die Extrema der Normalkrümmung k_{nmin} und k_{nmax} werden als Hauptkrümmung einer Fläche F im Flächenpunkt $\mathbf{x}_0$ bezeichnet.*

Bemerkung zur linearen Algebra:
1) Es soll das allgemeine Eigenwertproblem

$$\mathbf{L}\underline{v} = \lambda\mathbf{G}\underline{v} \ \Rightarrow\ (\mathbf{L} - \lambda\mathbf{G})\underline{v} = 0 \ \Rightarrow\ det(\mathbf{L} - \lambda\mathbf{G}) = 0$$

$$det(\mathbf{L} - \lambda\mathbf{G}) = \begin{vmatrix} l_{11} - \lambda g_{11} & l_{12} - \lambda g_{12} \\ l_{21} - \lambda g_{21} & l_{22} - \lambda g_{22} \end{vmatrix}$$

untersucht werden.
Da $\mathbf{G}$ und $\mathbf{L}$ symmetrisch sind, und $\mathbf{G}$ sogar positiv definit, besitzt das allgemeine Eigenwertproblem zwei reelle Lösungen $\lambda_{1,2}$ und zu jedem Eigenwert λ_i existiert, bis auf einen Faktor, ein eindeutiger Eigenvektor $\mathbf{v}_i$ der die obige Gleichung erfüllt. Weiterhin gilt

$$\underline{v}_1^T\mathbf{G}\underline{v}_2 = 0.$$

Die Eigenvektoren seien so normiert, daß

$$\underline{v}_i^T \mathbf{G} \underline{v}_i = 1 \text{ für } i = 1, 2.$$

2) Weiterhin läßt sich der sogenannte Rayleigh-Quotient definieren.

Definition 3.4.4 (Rayleigh-Quotient) *Die Funktion* $\mu : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$

$$\mu(\underline{v}) := \frac{\underline{v}^T \mathbf{L} \underline{v}}{\underline{v}^T \mathbf{G} \underline{v}}$$

heißt Rayleigh-Quotient der Matrizen $\mathbf{L}$ *und* $\mathbf{G}$.

Lemma 3.4.2 (Wertebereich des Rayleigh-Quotienten) *Seien* λ_{min} *und* λ_{max} *der kleinste bzw. größte Eigenwert des verallgemeinerten Eigenwertproblems* $\mathbf{L}\underline{v} = \lambda \mathbf{G} \underline{v}$, *wobei* $\mathbf{L}, \mathbf{G} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ *symmetrisch und* $\mathbf{G}$ *positiv definit. Dann gilt*

$$\lambda_{min} = \min_{\underline{v} \neq 0} \frac{\underline{v}^T \mathbf{L} \underline{v}}{\underline{v}^T \mathbf{G} \underline{v}} \text{ und } \lambda_{max} = \max_{\underline{v} \neq 0} \frac{\underline{v}^T \mathbf{L} \underline{v}}{\underline{v}^T \mathbf{G} \underline{v}}.$$

Beweis: Der Beweis ist in [DeuHoh] Abschnitt 8.5 nachzulesen.

Da das hier betrachtete Problem zweidimensional ist gilt $\lambda_1 \leq \mu(\underline{v}) \leq \lambda_2$.

Lemma 3.4.3 (Hauptkrümmung) *Die Hauptkrümmungen einer Fläche F im Flächenpunkt* $\mathbf{x}_0$ *ergeben sich gerade als Eigenwerte* λ_1, λ_2 *des Eigenwertproblems*

$$\mathbf{L}\underline{v} = \lambda \mathbf{G} \underline{v}, \ \underline{v} \in \mathbf{R}^2, \lambda \in \mathbf{R}, \tag{3.4-6}$$

wobei $\mathbf{L}, \mathbf{G}$ *abhängig von* $\mathbf{x}_0$ *sind. Die zugehörigen Eigenvektoren* $\underline{v}_i$ *lassen auf die entsprechenden Tangentenrichtungen* $\mathbf{r}_i$ *der extremalen Normalkrümmungen, d.h. auf die Hauptkrümmungsrichtungen , schließen*

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{X}' \underline{v}_i \text{ mit } \mathbf{X}' = (\mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,2}) \quad \textit{(siehe (3.4-5))}.$$

Bemerkung: 1) Im allgemeinen sind die zwei Eigenwerte verschieden, d.h. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dies bedeutet, daß die Eigenvektoren ebenfalls verschieden und eindeutig gegeben sind und somit auch die Tangentenrichtungen $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$. Allerdings ist es auch möglich, daß
2) die Eigenwerte identisch sind $\lambda_1 = \lambda_2$. In diesem Fall heißt dieser betreffende Flächenpunkt Nabelpunkt. Z.B. ist jeder Punkt der Kugeloberfläche ein Nabelpunkt, da er in alle Richtungen die selbe Normalkrümmung aufweist. Aber auch
3) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ist denkbar. In solchen Fällen wird der entsprechende Flächenpunkt als Flachpunkt bezeichnet.
4) Sind die Hauptkrümmungen verschieden, so stehen die Hauptrümmungsrichtungen in jedem Punkt der Fläche senkrecht zu einander.

$$(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (\mathbf{X}' \underline{v}_1, \mathbf{X}' \underline{v}_2) = \underline{v}_1^T \mathbf{X}'^T \mathbf{X}' \underline{v}_2 = \underline{v}_1^T \mathbf{G} \underline{v}_2 = 0$$

Beispiel: elliptischer Zylinder

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a\cos(u^1) \\ b\sin(u^1) \\ u^2 \end{pmatrix} \qquad u^1 \in [0, 2\pi), \qquad u^2 \in (-\infty, \infty)$$

$$\mathbf{x}_{,1} = \begin{pmatrix} -a\sin(u^1) \\ b\cos(u^1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_{,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{,11} = \begin{pmatrix} -a\cos(u^1) \\ -b\sin(u^1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_{,22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_{,12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(u^1, u^2) &= \frac{\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}}{|\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}|} \\ & \qquad |\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}| = \sqrt{det\mathbf{G}} \text{ aus der Lagrangeschen Identität} \\ &= \frac{1}{\sqrt{det\mathbf{G}}} \begin{pmatrix} -b\cos(u^1) \\ -a\sin(u^1) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{G} &= \begin{pmatrix} a^2\sin^2(u^1) + b^2\cos^2(u^1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{L} &= \frac{1}{\sqrt{det\mathbf{G}}} \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \lambda_1 = 0, & \underline{v}_1 = (0, c_1)^T \quad &\Rightarrow \tau_1 = (0, 0, c_1)^T \\ & \lambda_2 = \frac{ab}{\sqrt{(a^2\sin^2(u^1) + b^2\cos^2(u^1))^3}}, & \underline{v}_2 = (c_2, 0)^T \quad &\Rightarrow \tau_2 = c_2(-a\sin(u^1), b\cos(u^1), 0)^T \end{aligned}$$

Es wird deutlich, daß der Zylinder in jedem Flächenpunkt die minimale Normalkrümmung 0 in Richtung der z-Achse besitzt und seine maximale Krümmung entlang horizontaler Schnitte verläuft und diese jedoch von dem Flächenpunkt abhängt. ■

Beispiel: Ellipsoid

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a\cos(u^1)\cos(u^2) \\ b\sin(u^1)\cos(u^2) \\ c\sin(u^2) \end{pmatrix} \qquad u^1 \in [0, 2\pi),\ u^2 \in [-\pi/2, \pi/2]$$

$$\mathbf{x}_{,1} = \begin{pmatrix} -a\sin(u^1)\cos(u^2) \\ b\cos(u^1)\cos(u^2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_{,2} = \begin{pmatrix} -a\cos(u^1)\sin(u^2) \\ -b\sin(u^1)\sin(u^2) \\ c\cos(u^2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{,11} = \begin{pmatrix} -a\cos(u^1)\cos(u^2) \\ -b\sin(u^1)\cos(u^2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_{,22} = \begin{pmatrix} -a\cos(u^1)\cos(u^2) \\ -b\sin(u^1)\cos(u^2) \\ -c\sin(u^2) \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_{,12} = \begin{pmatrix} a\sin(u^1)\sin(u^2) \\ -b\cos(u^1)\sin(u^2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(u^1, u^2) &= \frac{\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}}{|\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}|} \\ & \qquad |\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}| = \sqrt{det\mathbf{G}} \ \text{ aus der Lagrangeschen Identität} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\cos(u^2)}{\sqrt{det\mathbf{G}}} \begin{pmatrix} cb\cos(u^1)\cos(u^2) \\ ac\sin(u^1)\cos(u^2) \\ ab\sin(u^2) \end{pmatrix} \\
\mathbf{G} &= \begin{pmatrix} \cos^2(u^2)(a^2\sin^2(u^1)+b^2\cos^2(u^1)) & (a^2-b^2)\sin(u^1)\cos(u^1)\sin(u^2)\cos(u^2) \\ (a^2-b^2)\sin(u^1)\cos(u^1)\sin(u^2)\cos(u^2) & (a^2\cos^2(u^1)+b^2\sin^2(u^1))\sin^2(u^2)+c^2\cos(u^2) \end{pmatrix} \\
\mathbf{L} &= \frac{1}{\sqrt{det\mathbf{G}}} \begin{pmatrix} -abc\cos^3(u^2) & 0 \\ 0 & -abc\cos(u^2) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Für den Spezialfall $a = b = c$, d.h. für die Kugel gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G} &= \begin{pmatrix} a^2\cos^2(u^2) & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{L} &= \begin{pmatrix} -a\cos^2(u^2) & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \lambda_1 = -1/a, \quad \underline{v}_1 = (c_{11}, c_{12})^T \quad \Rightarrow \tau_1 = \begin{pmatrix} -a(c_{11}\sin(u^1)\cos(u^2) + c_{12}\cos(u^1)\sin(u^2)) \\ a(c_{11}\cos(u^1)\cos(u^2) - c_{12}\sin(u^1)\sin(u^2)) \\ a(c_{11}\sin(u^2) + c_{12}\cos(u^2)) \end{pmatrix},
$$

$$
\lambda_2 = -1/a, \quad \underline{v}_2 = (c_{21}, c_{22})^T \quad \Rightarrow \tau_2 = \begin{pmatrix} -a(c_{21}\sin(u^1)\cos(u^2) + c_{22}\cos(u^1)\sin(u^2)) \\ a(c_{21}\cos(u^1)\cos(u^2) - c_{22}\sin(u^1)\sin(u^2)) \\ a(c_{21}\sin(u^2) + c_{22}\cos(u^2)) \end{pmatrix}
$$

Für die Kugel stellt sich heraus, daß die Oberfläche nur aus Nabelpunkten besteht, die in allen tangentialen Richtungen die selbe Normalkrümmung haben. ∎

Beispiel: hyperbolisches Paraboloid Es sei der Spezialfall mit der Darstellung

$$x_1^2 - x_2^2 - 2x_3 = 0$$

gewählt.

$$
\mathbf{x} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ ((u^1)^2 - (u^2)^2)/2 \end{pmatrix} \quad u^1 \in (-\infty, \infty), \qquad u^2 \in (-\infty, \infty)
$$

$$
\mathbf{x}_{,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u^1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}_{,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -u^2 \end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{x}_{,11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}_{,22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_{,12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}(u^1, u^2) &= \frac{\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}}{|\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}|} \\
& \qquad |\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}| = \sqrt{det\mathbf{G}} \text{ aus der Lagrangeschen Identität} \\
&= \frac{1}{\sqrt{det\mathbf{G}}} \begin{pmatrix} -u^1 \\ u^2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{G} &= \begin{pmatrix} 1 + (u^1)^2 & -u^1u^2 \\ -u^1u^2 & 1 + (u^2)^2 \end{pmatrix} \Rightarrow det(\mathbf{G}) = 1 + (u^1)^2 + (u^2)^2 \\
\mathbf{L} &= \frac{1}{\sqrt{det\mathbf{G}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Für den Flächenpunkt $(0,0,0)^T$ im Koordinatenursprung folgt

$$u^1 = 0,\ u^2 = 0$$

$$\mathbf{x}_{,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{x}_{,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{L}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = +1, \quad \underline{v}_1 = (c_1, 0)^T \quad \Rightarrow \tau_1 = (c_1, 0, 0)^T$$

$$\lambda_2 = -1, \quad \underline{v}_2 = (0, c_2)^T \quad \Rightarrow \tau_2 = (0, c_2, 0)^T$$

Dieses hyperbolische Paraboloid hat demzufolge im Koordinatenursprung die maximale Normalkrümmung von $+1$ in Richtung der x_1-Achse und die minimale Normalkrümmung von -1 in Richtung der x_2-Achse. ■

3.4.3 Mittlere und Gaußsche Krümmung

Definition 3.4.5 (Mittlere und Gaußsche Krümmung) *Es sei eine Fläche*

$$F = \{\mathbf{x} :\ \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2),\ (u^1, u^2) \in \mathbf{I}\}$$

gegeben. In einem Flächenpunkt $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(u_0^1, u_0^2)$ seien die Hauptkrümmungen λ_1 und λ_2 (siehe (3.4-6)) berechenbar. So ergibt sich die mittlere Krümmung in diesem Flächenpunkt durch

$$H = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$$

und die Gaußsche Krümmung durch

$$K = \lambda_1 \lambda_2. \tag{3.4-7}$$

Betrachtung: Berechnung der mittleren und der Gaußschen Krümmung
Es ist bekannt, daß sich die extremalen Krümmungen als Eigenwerte des allgemeinen Eigenwertproblems

$$det(\mathbf{L} - \lambda \mathbf{G}) = 0$$

ergeben. Daraus kann man das folgende schlußfolgern.

$$\begin{aligned} det(\mathbf{L} - \lambda \mathbf{G}) &= (l_{11} - \lambda g_{11})(l_{22} - \lambda g_{22}) - (l_{12} - \lambda g_{12})^2 \\ &= \underbrace{(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}_{det(\mathbf{G})} \lambda^2 + (-l_{22}g_{11} - l_{11}g_{22} + 2g_{12}l_{12})\lambda + \underbrace{(l_{11}l_{22} - l_{12}^2)}_{det(\mathbf{L})} \\ &= 0 \\ \Rightarrow 0 &= \lambda^2 + \frac{(-l_{22}g_{11} - l_{11}g_{22} + 2g_{12}l_{12})}{det(\mathbf{G})}\lambda + \frac{det(\mathbf{L})}{det(\mathbf{G})} \end{aligned}$$

Satz 3.4.1 (Wurzelsatz von Vieta für quadratische Funktionen) *Die Zahlen λ_1, λ_2 sind genau dann die Lösung der Gleichung*

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0,$$

wenn gilt

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -p \quad \textit{und} \quad \lambda_1 \lambda_2 = q.$$

Nach dem Wurzelsatz von Vieta für quadratische Polynome gilt

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{(l_{22}g_{11} + l_{11}g_{22} - 2l_{12}g_{12})}{det(\mathbf{G})} = 2H,$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{det(\mathbf{L})}{det(\mathbf{G})} = K.$$

■

Es ergibt sich demnach das

Lemma 3.4.4 (Mittlere und Gaußsche Krümmung aus metrischen Fundamentalgrößen)

$$\textit{Mittlere Krümmung} \quad H = \frac{(l_{22}g_{11} + l_{11}g_{22} - 2l_{12}g_{12})}{2\ det(\mathbf{G})} \tag{3.4-8}$$

$$\textit{Gaußsche Krümmung} \quad K = \frac{det(\mathbf{L})}{det(\mathbf{G})} \tag{3.4-9}$$

Bemerkung: 1) Das Vorzeichen der mittleren Krümmung ist von der Wahl der Parametrisierung abhängig. Ein Vertauschen der Parameter u^1 mit u^2 erzeugt zwar formal die selbe Fläche, jedoch besitzt die mittlere Krümmung das negierte Vorzeichen. Das Vorzeichen der Gaußschen Krümmung ist hingegen invariant gegenüber der Parametrisierung.
2) Aus der Gaußschen Krümmung läßt sich die folgende Klasseneinteilung der Flächenpunkte einer Fläche ableiten.

Definition 3.4.6 (Klasseneinteilung der Flächenpunkte) *Ein Flächenpunkt $\mathbf{x}_0$ einer Fläche F wird*

$$\begin{array}{lrcl} \textit{als} & \textit{elliptischer Punkt} & \Leftrightarrow & K > 0, \\ \textit{als} & \textit{parabolischer Punkt} & \Leftrightarrow & K = 0 \ \textit{oder} \\ \textit{als} & \textit{hyperbolischer Punkt} & \Leftrightarrow & K < 0 \ \textit{bezeichnet.} \end{array}$$

Beispiel: Elliptische Punkte enthalten z.B. ein Ellipsoid, elliptisches Paraboloid, zweischaliges Hyperboloid, parabolische Punkte enthalten z.B. alle Torsen und hyperbolische Punkte enthalten z.B. ein einschaliges Hyperboloid und hyperbolisches Paraboloid. ■

Beispiel: Torus

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} R\cos(u^1) + r\cos(u^2)\cos(u^1) \\ R\sin(u^1) + r\cos(u^2)\sin(u^1) \\ r\sin(u^2) \end{pmatrix}, \qquad (u^1, u^2) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] = \mathbf{I}$$

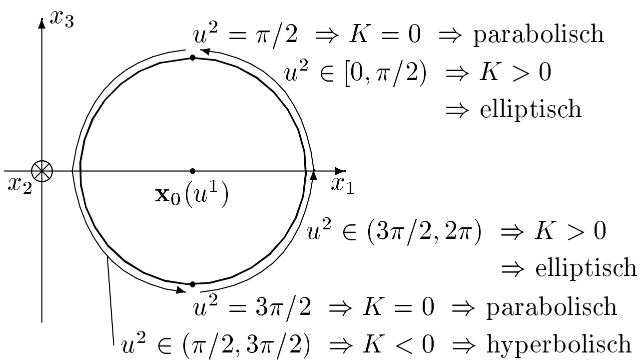
$$\mathbf{x}_{,1} = \begin{pmatrix} -R\sin(u^1) - r\cos(u^2)\sin(u^1) \\ R\cos(u^1) + r\cos(u^2)\cos(u^1) \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{,2} = \begin{pmatrix} -r\sin(u^2)\cos(u^1) \\ -r\sin(u^2)\sin(u^1) \\ r\cos(u^2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{,11} = \begin{pmatrix} -R\cos(u^1) - r\cos(u^2)\cos(u^1) \\ -R\sin(u^1) - r\cos(u^2)\sin(u^1) \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{,22} = \begin{pmatrix} -r\cos(u^2)\cos(u^1) \\ -r\cos(u^2)\sin(u^1) \\ -r\sin(u^2) \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{,12} = \begin{pmatrix} r\sin(u^2)\sin(u^1) \\ -r\sin(u^2)\cos(u^1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \frac{\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}}{|\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}|} = \begin{pmatrix} \cos(u^1)\cos(u^2) \\ \sin(u^1)\cos(u^2) \\ \sin(u^2) \end{pmatrix} \\ \mathbf{G} &= \begin{pmatrix} (R + r\cos(u^2))^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{L} &= \begin{pmatrix} -(R + r\cos(u^2))\cos(u^2) & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ K = \frac{\cos(u^2)}{R + r\cos(u^2)}\,\frac{1}{r}$$

Schnitt durch Torus in x_1-x_3-Ebene



■

Betrachtung: Motivation dieser Klasseneinteilung
Es soll o.B.d.A. der Flächenpunkt $\mathbf{x}(0,0)$ untersucht werden. Es wird eine zur Tangentialebene parallele Ebene

$$E_{T_\epsilon} = \{\mathbf{y}:\ (\mathbf{y} - \mathbf{x}(0,0), \mathbf{f}) = \epsilon\}$$

mit der Entfernung ϵ betrachtet. Auf dieser Ebene liegen Flächenpunkte $\mathbf{x}(u^1, u^2)$ für die folgendes gilt

$$\begin{aligned} \epsilon &= (\mathbf{x}(u^1, u^2) - \mathbf{x}(0,0), \mathbf{f}) \\ & \quad \text{nach Taylor folgt} \\ &= (\mathbf{x}(0,0) + u^i\mathbf{x}_{,i} + \frac{1}{2}u^iu^j\mathbf{x}_{,ij} + \mathbf{r}_2 - \mathbf{x}(0,0), \mathbf{f}) \\ &= \underbrace{(u^i\mathbf{x}_{,i}, \mathbf{f})}_{=0;\ \mathbf{x}_i \perp \mathbf{f}} + \frac{1}{2}u^iu^j\underbrace{(\mathbf{x}_{,ij}, \mathbf{f})}_{=l_{ij}} + \underbrace{(\mathbf{r}_2, \mathbf{f})}_{=c} \\ \pm 1 &= \frac{1}{2|\epsilon|}u^iu^jl_{ij} + \frac{c}{|\epsilon|} \\ & \quad \text{sei } \frac{u^i}{2|\epsilon|} = v^i \text{ und } \epsilon = o(|u^1|\ |u^2|) \text{ d.h. } \frac{c}{|\epsilon|} \to 0 \text{ für } u^1, u^2 \to 0 \\ &\approx v^iv^jl_{ij} \\ &\approx \underline{v}^T\mathbf{L}\underline{v} \end{aligned}$$

Definition 3.4.7 (Indikatrix (Dupin (1784-1873))) *Die Menge*

$$I = \{\underline{v} \in E_T:\ \underline{v}^T\mathbf{L}\underline{v} = \pm 1\},$$

wobei E_T die Tangentialebene der Fläche $\mathbf{F}$ im Flächenpunkt $\mathbf{x}(u^1, u^2)$ ist, wird als Indikatrix bezeichnet.

Aus dieser Indikatrix läßt sich das Folgende schlußfolgern (siehe [Wünsch]). Wenn

- $\mathbf{L}$ positiv definit ist, d.h. $det(\mathbf{L}) > 0 \;\Rightarrow\; K > 0$ (elliptischer Punkt), entspricht die Indikatrix einer Ellipse $\underline{v}^T\mathbf{L}\underline{v} = 1$. Ist jedoch
- $\mathbf{L}$ indefinit, d.h. $det(\mathbf{L}) < 0 \;\Rightarrow\; K < 0$ (hyperbolischer Punkt), entspricht die Indikatrix zwei Hyperbeln $\underline{v}^T\mathbf{L}\underline{v} = \pm 1$. Wenn
- $det(\mathbf{L}) = 0$, d.h. $K = 0$ (parabolischer Punkt) und es existiert nur ein Eigenwert, so entspricht die Indikatrix zwei parallelen Geraden $\underline{v}^T\mathbf{L}\underline{v} = \pm 1$. Wenn jedoch
- $\mathbf{L} = 0$, so ist die Indikatrix leer und der Flächenpunkt ist ein Flachpunkt. ■

3.5 Ableitungsgleichung von Gauß und Weingarten

Es soll die Fläche

$$F = \{\mathbf{x} :\; \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2),\; (u^1, u^2) \in \mathbf{I}\}$$

untersucht werden. Von dieser Fläche sind die Größen

$(\mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,2}, \mathbf{f})$	das Flächendreibein,
$\mathbf{G} = ((\mathbf{x}_{,i}, \mathbf{x}_{,j}))_{i,j=1}^2$	1. metrische Fundamentalgröße und
$\mathbf{L} = ((\mathbf{x}_{,ij}, \mathbf{f}))_{i,j=1}^2$	2. metrische Fundamentalgröße berechenbar.

Definition 3.5.1 (Christoffel-Symbole) *Stellt man die zweiten Ableitungen der Parameterdarstellung $\mathbf{x}_{,ij}$ als Linearkombination der Vektoren des Flächendreibeines dar*

$$\mathbf{x}_{,ij} = \Gamma^1_{ij}\mathbf{x}_{,1} + \Gamma^2_{ij}\mathbf{x}_{,2} + l_{ij}\mathbf{f},$$

so werden die Koeffizienten $\Gamma^k_{ij},\; k = 1,2$ als Christoffel-Symbole bezeichnet.

Betrachtung: Multipliziert man die obige Gleichung mit $\mathbf{x}_{,k}$, so ergibt sich

$$(\mathbf{x}_{,k}, \mathbf{x}_{,ij}) = \Gamma^1_{ij}g_{k1} + \Gamma^2_{ij}g_{k2} + l_{ij}\underbrace{(\mathbf{x}_{,k}, \mathbf{f})}_{=0;\; \mathbf{x}_{,k}\perp\mathbf{f}}\;.$$

Allgemein gilt unter Beachtung der Einsteinschen Summenkonvention

$$(\mathbf{x}_{,k}, \mathbf{x}_{,ij}) = \Gamma^l_{ij}g_{lk} = \Gamma^l_{ij}g_{kl}.$$

Definition 3.5.2 (Ableitungsgleichungen von Gauß) *Die Gleichungen*

$$\mathbf{x}_{,ij} = \Gamma^1_{ij}\mathbf{x}_{,1} + \Gamma^2_{ij}\mathbf{x}_{,2} + l_{ij}\mathbf{f},\; i,j = 1,2, \tag{3.5-1}$$

und das Produkt aus diesen mit $\mathbf{x}_{,k}$

$$(\mathbf{x}_{,k}, \mathbf{x}_{,ij}) = \Gamma^l_{ij}g_{lk} = \Gamma^l_{ij}g_{kl},\; i,j,k = 1,2, \tag{3.5-2}$$

werden als Gaußsche Ableitungsgleichungen bezeichnet.

Bemerkung: Die Ableitungsgleichungen von Gauß beschreiben die Darstellung der partiellen Ableitungen der Tangentialvektoren einer Fläche als Linearkombination des Flächendreibeines. Gemeinsam mit den Ableitungsgleichungen von Weingarten, welche noch eingeführt werden, haben sie für die Flächentheorie die gleiche

Bedeutung wie die Frenetschen Formeln (vgl. Abschnitt 2.4) für die Kurventheorie.

Folgerung: Multipliziert man die Gaußsche Ableitungsgleichung

$$\mathbf{x}_{,ij} = \Gamma_{ij}^{k}\mathbf{x}_{,k} + l_{ij}\mathbf{f}$$

unter Beachtung der Einsteinschen Summenkonvention mit $\mathbf{x}_{,m}$

$$(\mathbf{x}_{,m}, \mathbf{x}_{,ij}) = \Gamma_{ij}^{k} g_{km}$$

und weiter mit g^{mn}, wobei $g_{km}g^{mn} = \delta_{kn}$, so erhält man

$$g^{mn}(\mathbf{x}_{,m}, \mathbf{x}_{,ij}) = \Gamma_{ij}^{n}.$$

Es sei angemerkt, daß die g^{ij} die Elemente der Inversen $\mathbf{G}^{-1}$ der ersten metrischen Fundamentalgröße $\mathbf{G}$ sind. Betrachtet man die Ableitung der ersten metrischen Fundamentalgröße g_{ij} nach den Parametern u^m so ergibt sich

$$g_{ij,m} = \frac{\partial}{\partial u^m} g_{ij} = \frac{\partial}{\partial u^m}(\mathbf{x}_{,i}, \mathbf{x}_{,j}) = (\mathbf{x}_{,im}, \mathbf{x}_{,j}) + (\mathbf{x}_{,i}, \mathbf{x}_{,jm}).$$

Daraus folgt die Berechenbarkeit der Christoffel-Symbole Γ_{ij}^{k} aus der ersten metrischen Fundamentalgröße

$$\Gamma_{ij}^{n} = \frac{1}{2} g^{nm} \underbrace{(g_{mi,j} + g_{jm,i} - g_{ij,m})}_{2(\mathbf{x}_{,m}, \mathbf{x}_{,ij})}. \tag{3.5-3}$$

■

Betrachtung: Es soll die Ableitung des Flächennormalenvektors $\mathbf{f}_{,i}(u^1, u^2)$, dargestellt als Linearkombination des Flächendreibeines $(\mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,2}, \mathbf{f})$, untersucht werden.

$$\mathbf{f}_{,i}(u^1, u^2) = \alpha_i^1 \mathbf{x}_{,1}(u^1, u^2) + \alpha_i^2 \mathbf{x}_{,2}(u^1, u^2) + \beta_i \mathbf{f}(u^1, u^2) \tag{3.5-4}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit dem Flächennormalenvektor $\mathbf{f}(u^1, u^2)$

$$\begin{aligned} \underbrace{0 = (\mathbf{f}, \mathbf{f}_{,i})}_{\text{Lemma 1.3.1}} &= \alpha_i^1 \underbrace{(\mathbf{f}, \mathbf{x}_{,1})}_{=0} + \alpha_i^2 \underbrace{(\mathbf{f}, \mathbf{x}_{,2})}_{=0} + \beta_i \underbrace{(\mathbf{f}, \mathbf{f})}_{=|\mathbf{f}|^2=1} \\ \Rightarrow \quad & \beta_i = 0 \\ \text{wegen (3.5-4) folgt} \Rightarrow \quad & \mathbf{f}_{,i} = \alpha_i^1 \mathbf{x}_{,1} + \alpha_i^2 \mathbf{x}_{,2}. \end{aligned}$$

Andererseits ergibt die Multiplikation mit einem Tangentenvektor $\mathbf{x}_{,j}$

$$\begin{aligned} \underbrace{(\mathbf{x}_{,j}, \mathbf{f}_{,i})}_{-l_{ij}} &= \alpha_i^1 \underbrace{(\mathbf{x}_{,j}, \mathbf{x}_{,1})}_{g_{j1}} + \alpha_i^2 \underbrace{(\mathbf{x}_{,j}, \mathbf{x}_{,2})}_{g_{j2}} \\ l_{ij} &= -\alpha_i^m g_{jm}, \ \forall i, j = 1, 2 \\ \Rightarrow \mathbf{L} &= -\mathbf{AG}, \quad \text{mit } \mathbf{A} = (\alpha_i^m)_{i,m=1}^2 \\ \Rightarrow \mathbf{A} &= -\mathbf{LG}^{-1}, \quad \text{mit } \mathbf{G}^{-1} = (g^{im})_{i,m=1}^2. \end{aligned}$$

Es gilt $g^{im}g_{mj} = \delta_{ij}$ und $\alpha_i^j = -l_{ik}g^{kj}$.
Mit dem Wissen, daß $\beta_i = 0$ und $\alpha_i^j = -l_{ik}g^{kj}$ lassen sich ausgehend von (3.5-4) die Ableitungsgleichungen von Weingarten definieren.

Definition 3.5.3 (Ableitungsgleichungen von Weingarten) *Die Gleichungen*

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{,i} &= -l_{ik}g^{k1}\mathbf{x}_{,1} - l_{ik}g^{k2}\mathbf{x}_{,2} \quad i = 1,2 \\ &= -l_{ik}g^{kj}\mathbf{x}_{,j} \end{aligned} \tag{3.5-5}$$

werden als Ableitungsgleichungen von Weingarten bezeichnet.

Bemerkung: Die Ableitungsgleichungen von Weingarten beschreiben die Darstellung der partiellen Ableitungen des Flächennormalenvektors einer Fläche als Linearkombination des Flächendreibeines. Gemeinsam mit den Ableitungsgleichungen von Gauß haben sie für die Flächentheorie die gleiche Bedeutung wie die Frenetschen Formeln (vgl. Abschnitt 2.4) für die Kurventheorie.

Folgerung: 1) Der Ableitungsvektor des Flächennormalenvektors liegt somit in der Tangentialebene der Fläche.
2) Aus den Ableitungsgleichungen von Weingarten ergibt sich folgende Darstellung der Gaußschen Normalkrümmung

Lemma 3.5.1 (Darstellung der Gaußschen Krümmung) *Die Gaußsche Krümmung K kann durch den Quotienten*

$$K = \frac{[\mathbf{f}(u^1,u^2), \mathbf{f}_{,1}(u^1,u^2), \mathbf{f}_{,2}(u^1,u^2)]}{[\mathbf{f}(u^1,u^2), \mathbf{x}_{,1}(u^1,u^2), \mathbf{x}_{,2}(u^1,u^2)]}$$

charakterisiert werden.

Beweis: Vorerst soll der Zähler betrachtet werden.

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}, \mathbf{f}_{,1}, \mathbf{f}_{,2}] &= [\mathbf{f}, -l_{1j}g^{jk}\mathbf{x}_{,k}, -l_{2r}g^{rs}\mathbf{x}_{,s}] \\ &= l_{1j}g^{jk}l_{2r}g^{rs}[\mathbf{f}, \mathbf{x}_{,k}, \mathbf{x}_{,s}] \end{aligned}$$

Sind die Indizes k und s identisch, so ist das Spatprodukt Null.

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}, \mathbf{f}_{,1}, \mathbf{f}_{,2}] &= (l_{1j}g^{j1}l_{2r}g^{r2} - l_{1j}g^{j2}l_{2r}g^{r1})[\mathbf{f}, \mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,2}] \\ &= \underbrace{(\alpha_1^1\alpha_2^2 - \alpha_1^2\alpha_2^1)}_{=det(\mathbf{A})}[\mathbf{f}, \mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,2}] \\ \Rightarrow K &= \frac{det(\mathbf{A})[\mathbf{f}, \mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,2}]}{[\mathbf{f}, \mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,2}]} = det(\mathbf{A}) \\ &= det(-\mathbf{L}\mathbf{G}^{-1}) \\ &= det(\mathbf{L}\mathbf{G}^{-1}), \quad \text{da die Dimension von } \mathbf{G}, \mathbf{L} \text{ zwei ist} \\ &= det(\mathbf{L})\ det(\mathbf{G}^{-1}) \\ &= det(\mathbf{L})/det(\mathbf{G}), \quad \text{dies entspricht der Definition} \end{aligned}$$

3.6 Geodätische Krümmung und geodätische Linien

Es soll eine Fläche F betrachtet werden, die durch die Parameterdarstellung

$$F = \{\mathbf{x} : \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2), \ (u^1, u^2) \in \mathbf{I}\}$$

definiert ist. In dieser Fläche liege die Kurve

$$\Gamma = \{\mathbf{y} : \ \mathbf{y}(s) = \mathbf{x}(u^1(s), u^2(s)), \ s \in \mathbf{S}\}.$$

Der Parameter s sei so gewählt, daß er dem natürlichen Parameter der Kurve Γ entspricht. Es sei $\underline{u}(s) = (u^1(s), u^2(s))^T$, $\mathbf{n}$ bezeichne den Normalenvektor der Kurve und $\mathbf{f}$ den der Fläche. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(s) &= u^{i\prime}\mathbf{x}_{,i} = \mathbf{t}(s) && \text{(man beachte die Einsteinsche Summenkonvention)} \\ \mathbf{y}''(s) &= u^{i\prime\prime}\mathbf{x}_{,i} + u^{i\prime}u^{j\prime}\mathbf{x}_{,ij} = k(s)\mathbf{n}(s) && \text{Krümmungsvektor} \end{aligned}$$

Wie bereits aus dem Abschnitt 3.4.1 hervorging läßt sich der Krümmungsvektor lokal im Koordinatensystem, welches durch das begleitende Dreibein $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{f})$ aufgespannt wird, angeben (siehe (3.4-2)).

$$\mathbf{y}''(s) = k_n(s)\mathbf{f}(s) + k_g(s)\ \mathbf{e}(\mathbf{s}), \qquad |\mathbf{e}| = 1$$

$k_n(s)$ und $k_g(s)$ entsprechen der Normalkrümmung und der geodätischen Krümmung. Die geodätische Krümmung k_g entspricht dem Anteil des Krümmungsvektors der Kurve Γ in der Tangentialebene. Aus (3.4-4) geht bereits die Berechnungsvorschrift

$$k_g(s) = (\mathbf{y}''(s), \mathbf{f}(s) \times \mathbf{y}'(s)) = [\mathbf{f}(s), \mathbf{y}'(s), \mathbf{y}''(s)]$$

für die geodätische Krümmung der Kurve Γ hervor.
Im weiteren soll eine Berechnungsvorschrift der geodätischen Krümmung für den Fall, daß die Kurve Γ nicht in natürlichen Parametern gegeben ist, konstruiert werden. Nach (3.4-4) gilt

$$k_g = [\mathbf{f}, \mathbf{y}', \mathbf{y}''] = [\mathbf{y}', \mathbf{y}'', \mathbf{f}] = (\mathbf{y}' \times \mathbf{y}'', \mathbf{f})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= u^{i\prime}\mathbf{x}_{,i} \\ \mathbf{y}'' &= u^{j\prime\prime}\mathbf{x}_{,j} + u^{j\prime}u^{k\prime}\mathbf{x}_{,jk} \quad \text{nach der Gaußschen Ableitungsgleichung (3.5-1) folgt} \\ &= u^{n\prime\prime}\mathbf{x}_{,n} + u^{j\prime}u^{k\prime}(\Gamma^n_{jk}\mathbf{x}_{,n} + l_{jk}\mathbf{f}) \\ &= ((u^{n\prime\prime} + u^{j\prime}u^{k\prime}\Gamma^n_{jk})\mathbf{x}_{,n} + u^{j\prime}u^{k\prime}l_{jk}\mathbf{f}) \\ \mathbf{y}' \times \mathbf{y}'' &= (u^{i\prime}\mathbf{x}_{,i}) \times (u^{n\prime\prime} + u^{j\prime}u^{k\prime}\Gamma^n_{jk})\mathbf{x}_{,n} + \mathbf{r} \quad \text{mit } \mathbf{r} \perp \mathbf{f} \end{aligned}$$

$$= ((u^{i\prime}\mathbf{x}_{,i}) \times (u^{n\prime\prime} + u^{j\prime}u^{k\prime}\Gamma^n_{jk})\mathbf{x}_{,n}, \mathbf{f}) + \underbrace{(\mathbf{r}, \mathbf{f})}_{=0}$$

$$a^i = u^{i\prime} \ \text{ und } \ b^n = (u^{n\prime\prime} + u^{j\prime}u^{k\prime}\Gamma^n_{jk})$$

$$= (a^i\mathbf{x}_{,i} \times b^n\mathbf{x}_{,n}, \mathbf{f})$$

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}}{|\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}|} \quad \text{nach (3.1-4)}$$

$$= \frac{a^i b^n}{|\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}|}(\underbrace{\mathbf{x}_{,i} \times \mathbf{x}_{,n}}_{=0 \text{ für } i=n}, \mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2})$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a^1 b^2}{|\mathbf{x}_{,1}\times\mathbf{x}_{,2}|}\underbrace{(\mathbf{x}_{,1}\times\mathbf{x}_{,2},\mathbf{x}_{,1}\times\mathbf{x}_{,2})}_{=|\mathbf{x}_{,1}\times\mathbf{x}_{,2}|^2}+\frac{a^2 b^1}{|\mathbf{x}_{,1}\times\mathbf{x}_{,2}|}(\underbrace{\mathbf{x}_{,2}\times\mathbf{x}_{,1}}_{=-(\mathbf{x}_{,1}\times\mathbf{x}_{,2})},\mathbf{x}_{,1}\times\mathbf{x}_{,2})\\
&= \frac{a^1 b^2 - a^2 b^1}{|\mathbf{x}_{,1}\times\mathbf{x}_{,2}|}\underbrace{(\mathbf{x}_{,1}\times\mathbf{x}_{,2},\mathbf{x}_{,1}\times\mathbf{x}_{,2})}_{|\mathbf{x}_{,1}\times\mathbf{x}_{,2}|^2}
\end{aligned}
$$

$|\mathbf{x}_{,1}\times\mathbf{x}_{,2}|^2 = (\mathbf{x}_{,1}\times\mathbf{x}_{,2},\mathbf{x}_{,1}\times\mathbf{x}_{,2})$ nach der Lagrangen Identität (1.1-2) folgt

$$= (\mathbf{x}_{,1},\mathbf{x}_{,1})(\mathbf{x}_{,2},\mathbf{x}_{,2}) - (\mathbf{x}_{,1},\mathbf{x}_{,2})(\mathbf{x}_{,2},\mathbf{x}_{,1}) = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = det(\mathbf{G})$$

$$
\begin{aligned}
&= (a^1 b^2 - a^2 b^1)\sqrt{det(\mathbf{G})}\\
\Rightarrow k_g &= (u^{1\prime}(u^{2\prime\prime} + u^{j\prime}u^{k\prime}\Gamma^2_{jk}) - u^{2\prime}(u^{1\prime\prime} + u^{j\prime}u^{k\prime}\Gamma^1_{jk}))\sqrt{det(\mathbf{G})} \qquad (3.6\text{-}1)
\end{aligned}
$$

Aus dieser Formulierung der geodätischen Krümmung geht hervor, daß sie eine innergeometrische Größse ist. Siehe dazu Abschnitt 3.8.2, d.h. sie wird ausschließlich durch die 1. metrische Fundamentalgröße $\mathbf{G}$ und deren Ableitungen definiert.

Um nun eine Formulierung der geodätischen Krümmung zu finden, die sich auf Kurven allgemeiner Parametrisierung bezieht, sind noch die Ableitungen der Parameter u^i zu untersuchen.

$$k_g = (u^{1\prime}(u^{2\prime\prime} + u^{j\prime}u^{k\prime}\Gamma^2_{jk}) - u^{2\prime}(u^{1\prime\prime} + u^{j\prime}u^{k\prime}\Gamma^1_{jk}))\sqrt{det(\mathbf{G})}$$

$$
\begin{aligned}
u^{i\prime} &= \tfrac{d}{ds}u^i = \tfrac{d}{dt}u^i\tfrac{dt}{ds} = \dot u^i t'\\
u^{i\prime\prime} &= \tfrac{d}{ds}u^{i\prime} = \tfrac{d}{ds}(\dot u^i t') = \tfrac{d}{ds}\dot u^i\ t' + \dot u^i\ \tfrac{d}{ds}t' = \tfrac{d}{dt}\dot u^i\ (t')^2 + \dot u^i\ t'' = \ddot u^i(t')^2 + \dot u^i t''
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (\dot u^1 t'((\ddot u^2\ (t')^2 + \dot u^2\ t'') + \dot u^j t'\dot u^k t'\Gamma^2_{jk}) - \dot u^2 t'((\ddot u^1\ (t')^2 + \dot u^1\ t'') + \dot u^j t'\dot u^k t'\Gamma^1_{jk}))\sqrt{det(\mathbf{G})}\\
&= (\dot u^1\ddot u^2 - \dot u^2\ddot u^1 + \dot u^j\dot u^k(\dot u^1\Gamma^2_{jk} - \dot u^2\Gamma^1_{jk}))(t')^3\sqrt{det(\mathbf{G})}
\end{aligned}
$$

aus (3.3-1) folgt: $t' = 1/\sqrt{\underline{\dot u}^T\mathbf{G}\underline{\dot u}}$

$$\Rightarrow k_g = \frac{\sqrt{det(\mathbf{G})}}{(\underline{\dot u}^T\mathbf{G}\underline{\dot u})^{3/2}}(\dot u^1\ddot u^2 - \dot u^2\ddot u^1 + \dot u^j\dot u^k(\dot u^1\Gamma^2_{jk} - \dot u^2\Gamma^1_{jk})) \qquad (3.6\text{-}2)$$

Beispiel: geodätische Krümmung der Koordinatenlinien

- Γ_1 mit $u^1 = t$ und $u^2 = c_2 = const$ (siehe (3.1-1))

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} t \\ c_2 \end{pmatrix},\ \underline{\dot u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \underline{\ddot u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\dot u}^T\mathbf{G}\underline{\dot u} = g_{11}$$

$$\Rightarrow \qquad k_g = \tfrac{\sqrt{det(\mathbf{G})}}{(g_{11})^{3/2}}\Gamma^2_{11}$$

- Γ_2 mit $u^1 = c_1 = const$ und $u^2 = t$ (siehe (3.1-2))

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} c_1 \\ t \end{pmatrix},\ \underline{\dot u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \underline{\ddot u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\dot u}^T\mathbf{G}\underline{\dot u} = g_{22}$$

$$\Rightarrow \qquad k_g = \tfrac{\sqrt{det(\mathbf{G})}}{(g_{22})^{3/2}}\Gamma^1_{22}$$

■

Beispiel: Rotationsfläche

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r(u^1)\cos(u^2) \\ r(u^1)\sin(u^2) \\ u^1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}_{,1} = \begin{pmatrix} r'(u^1)\cos(u^2) \\ r'(u^1)\sin(u^2) \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}_{,2} = \begin{pmatrix} -r(u^1)\sin(u^2) \\ r(u^1)\cos(u^2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1+(r'(u^1))^2 & 0 \\ 0 & r^2(u^1) \end{pmatrix}, \ \mathbf{G}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/(1+(r'(u^1))^2) & 0 \\ 0 & 1/r^2(u^1) \end{pmatrix}$$

- Es ergibt sich demnach für die geodätische Krümmung des Meridians Γ_1 mit $u^1 = t$ und $u^2 = c_2 = const$ (siehe (3.1-1))

$$k_g = \frac{\sqrt{det(\mathbf{G})}}{(g_{11})^{3/2}} \Gamma^2_{11} = 0$$

  da nach (3.5-3) gilt

$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2} \underbrace{g^{2m}}_{=0, m=1} (\underbrace{g_{m1,1}}_{=0, m=2} + \underbrace{g_{1m,1}}_{=0, m=2} - \underbrace{g_{11,m}}_{=0, m=2}) = 0$$

  Demnach sind die Meridiane einer Rotationsfläche nach der Definition 3.6.1 geodätische Linien, dies bedeutet, daß die kürzeste Verbindung zweier auf einem Meridian liegenden Punkte entlang dieses Meridians führen kann.

- Für die Breitenkreise Γ_2 mit $u^1 = c_1 = const$ und $u^2 = t$ (siehe (3.1-2)) von Rotationsflächen folgt

$$\begin{aligned} k_g &= \frac{\sqrt{det(\mathbf{G})}}{(g_{22})^{3/2}} \Gamma^1_{22} \\ & \quad \text{nach (3.5-3) gilt } \Gamma^1_{22} = \frac{1}{2} \underbrace{g^{1m}}_{=0, m=2} (\underbrace{g_{m2,2}}_{=0, m=1} + \underbrace{g_{2m,2}}_{=0, m=1} - \underbrace{g_{22,m}}_{\neq 0, m=1}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1+(r')^2)} \right) (-2rr') \\ &= \frac{\sqrt{(1+(r')^2)r^2}}{(r^2)^{3/2}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1+(r')^2)} \right) (-2rr') \\ &= -\frac{r'}{r\sqrt{1+(r')^2}} \end{aligned}$$

  Demnach sind die Breitenkreise einer Rotationsfläche nicht notwendig geodätische Linien, dies bedeutet, daß die kürzeste Verbindung zweier auf einem Breitenkreis liegenden Punkte nicht entlang dieses Breitenkreises führen muß.
  Für den Spezialfall des Kreiszylinder gilt jedoch $r(u^1) = const$ und somit $r'(u^1) = 0$. In diesem Fall entsprechen die Breitenkreise geodätischen Linien. ■

3.6.1 Geodätische Linien

Definition 3.6.1 (geodätische Linien) *Eine Flächenkurve*

$$\Gamma = \{\mathbf{y} : \ \mathbf{y}(s) = \mathbf{x}(u^1(s), u^2(s)), \ s \in \mathbf{S}\}.$$

in einer Fläche

$$F = \{\mathbf{x} : \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2), \ (u^1, u^2) \in \mathbf{I}\}$$

heißt geodätische Linie, wenn ihre geodätische Krümmung k_g in jedem Punkt der Kurve Null ist.

Folgerung: Nach (3.4-2) gilt für geodätische Linien, da $k_g = 0$,

$$k\mathbf{n} = k_n\mathbf{f} + \underbrace{k_g}_{=0}\mathbf{e} \quad \Rightarrow \quad k\mathbf{n} = k_n\mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{k_n}{k}\right| = \frac{|\mathbf{n}|}{|\mathbf{f}|} = \frac{1}{1} = 1$$

Da der Hauptnormalenvektor $\mathbf{n}$ und der Flächennormalenvektor $\mathbf{f}$ normiert sind, so folgt zum einen, daß sich diese beiden Vektoren nur um ihr Vorzeichen unterscheiden, also entweder identisch oder invers zueinander sind,

$$\mathbf{n} = \pm\mathbf{f} \tag{3.6-3}$$

und zum anderen, daß sich die Krümmung und die Geodätische Krümmung ebenfalls nur um ihr Vorzeichen unterscheiden.

Bemerkung: In einigen Literaturstellen wird die Beziehung (3.6-3) zwischen dem Hauptnormalenvektor $\mathbf{n}$ und dem Flächennormalenvektor $\mathbf{f}$ als Definition der geodätischen Linie gebraucht. Um dies zu gewährleisten, muß die Äquivalenz dieser Beziehung zur Definition 3.6.1 gezeigt werden. Das aus der Bedingung $k_g = 0$ die Beziehung $\mathbf{n} = \pm\mathbf{f}$ folgt ist bereits gezeigt nun soll die Umkehrung nachgewiesen werden.
Es ist bekannt, daß $|\mathbf{n}| = |\mathbf{f}| = 1$. Weiterhin gilt nach (3.4-1) und (3.4-2) für geodätische Linien

$$\begin{aligned}
k\mathbf{n} &= k_n\mathbf{f} + k_g\mathbf{e}, \\
&\quad \text{mit } \mathbf{n} = \pm\mathbf{f} \\
\pm k\mathbf{f} &= k_n\mathbf{f} + k_g\mathbf{e} \\
\pm k\underbrace{(\mathbf{f},\mathbf{e})}_{=0} &= k_n\underbrace{(\mathbf{f},\mathbf{e})}_{=0} + k_g\underbrace{(\mathbf{e},\mathbf{e})}_{=1} \\
0 &= k_g
\end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß geodätische Linien auf Flächen keine von Null verschiedene geodätische Krümmung besitzen.

Satz 3.6.1 (Hinreichende und Notwendige Bedingung geodätischer Linien) *Eine Flächenkurve* $\mathbf{y}(s) = \mathbf{x}(u^1(s), u^2(s))$ *ist genau dann eine geodätische Linie, falls eine der Gleichungen gilt*

$$\textbf{a)} \qquad (\mathbf{f}, \mathbf{t} \times k\mathbf{n}) = 0 \tag{3.6-4}$$

$$\textbf{b)} \quad u^{i\prime\prime} + u^{j\prime} u^{k\prime} \Gamma^i_{jk} = 0 \ \forall i = 1,2 \tag{3.6-5}$$

Beweis:

zu a) $(\mathbf{f}, \mathbf{t} \times k\mathbf{n}) = (\mathbf{f}, \mathbf{y}' \times \mathbf{y}'') = [\mathbf{f}, \mathbf{y}', \mathbf{y}''] = k_g = 0$ nach (3.4-4)

zu b) „⇒“ Es sei vorausgesetzt, daß Γ eine geodätische Linie ist. Es gilt demnach $k_g = 0$.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'' &= u^{i\prime\prime}\mathbf{x}_{,i} + u^{i\prime}u^{j\prime}\mathbf{x}_{,ij} && \text{folgt aus (3.4-1)} \\ \mathbf{y}'' &= k_n\mathbf{f} + k_g\mathbf{e} && \text{folgt aus (3.4-2)} \\ \Rightarrow \quad u^{i\prime\prime}\mathbf{x}_{,i} + u^{i\prime}u^{j\prime}\mathbf{x}_{,ij} &= k_n\mathbf{f} + \underbrace{k_g}_{=0}\mathbf{e} \end{aligned}$$

$$k_n = \underline{u}'^T \mathbf{L} \underline{u}' \qquad \text{folgt aus (3.4-3)}$$

$$\mathbf{x}_{,ij} = \Gamma^k_{ij}\mathbf{x}_{,k} + l_{ij}\mathbf{f} \qquad \text{folgt aus (3.5-1)}$$

$$\begin{aligned} u^{k\prime\prime}\mathbf{x}_{,k} + u^{i\prime}u^{j\prime}(\Gamma^k_{ij}\mathbf{x}_{,k} + l_{ij}\mathbf{f}) &= \underline{u}'^T\mathbf{L}\underline{u}'\mathbf{f} \\ (u^{k\prime\prime} + u^{i\prime}u^{j\prime}\Gamma^k_{ij})\mathbf{x}_{,k} + u^{i\prime}u^{j\prime}l_{ij}\mathbf{f}) &= u^{i\prime}u^{j\prime}l_{ij}\mathbf{f} \\ u^{k\prime\prime} + u^{i\prime}u^{j\prime}\Gamma^k_{ij} &= 0 \ \forall k = 1,2 \end{aligned}$$

„⇐“ Unter der Voraussetzung, daß $u^{k\prime\prime} + u^{i\prime}u^{j\prime}\Gamma^k_{ij} = 0 \ \forall k = 1,2$ gilt, erfolgt der Beweis in analoger Weise. Aus dieser Forderung folgt durch analoge Umformungen

$$u^{i\prime\prime}\mathbf{x}_{,i} + u^{i\prime}u^{j\prime}\mathbf{x}_{,ij} = k_n\mathbf{f}$$

nach (3.4-1) gilt $u^{i\prime\prime}\mathbf{x}_{,i} + u^{i\prime}u^{j\prime}\mathbf{x}_{,ij} = \mathbf{y}''$ und

nach (3.4-2) gilt $k_n\mathbf{f} = \mathbf{y}'' - k_g\mathbf{e}$

$$\Rightarrow \mathbf{y}'' = \mathbf{y}'' - k_g\mathbf{e}$$

Da jedoch o.B.d.A. $\mathbf{e} \neq 0$ kann die Gleichung nur erfüllt werden, wenn $k_g = 0$, d.h. Γ ist geodätische Linie.

Beispiel: Zylinderoberfläche In diesem Beispiel soll gezeigt werden, daß jede Schraubenlinie, die auf diesem Zylinder liegt, eine geodätische Linie ist.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r\cos(u^1) \\ r\sin(u^1) \\ u^2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}_{,1} = \begin{pmatrix} -r\sin(u^1) \\ r\cos(u^1) \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}_{,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es wird die Schraubenlinie bzgl. $\underline{u}(t) = (t, ht)^T$ untersucht.

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \\ ht \end{pmatrix}, \ \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \\ h \end{pmatrix}, \ \mathbf{y}'' = \begin{pmatrix} -r\cos(t) \\ -r\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$k_g = [\mathbf{f}, \mathbf{y}', \mathbf{y}''] = \left[\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r\cos(t) \\ -r\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0, \quad \text{da } \mathbf{f} \text{ und } \mathbf{y}'' \text{ linear abhängig sind}$$

Es ist zu erkennen, daß durch einen Flächenpunkt des Zylinders in jede Richtung eine geodätische Linie verläuft, da die Meridiane und die Breitenkreise ebenfalls geodätische Linien sind (siehe Beispiel der Rotationsflächen auf Seite 74). Weiterhin lassen sich demnach zwei verschiedene Flächenpunkte, die nicht auf einem Breitenkreis oder Meridian liegen, durch unendlich viele Schraubenlinien mit unterschiedlichem Anstieg, also durch unendlich viele geodätische Linien, miteinander verbinden. ■

Bemerkung: Man kann für alle Flächen nachweisen, daß durch jeden beliebigen Punkt der Fläche in jede Richtung eine geodätische Linie verläuft.

Beispiel: In der Ebene sind genau die Geraden geodätische Linien und auf der Kugel bilden die Großkreise (z.B. Längenkreise und Äquator) geodätische Linien. ■

Betrachtung: kürzeste Verbindung zweier Flächenpunkte Es sei zu zwei Flächenpunkten $\mathbf{x}_i, \ i = 1, 2$ der Fläche

$$F = \{\mathbf{x} : \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2), \ (u^1, u^2) \in \mathbf{I}\}$$

durch die Vektorfunktion $\underline{u}(s) = (u^1(s), u^2(s))^T$ die Kurve

$$\Gamma = \{\mathbf{y} : \ \mathbf{y}(s) = \mathbf{x}(u^1(s), u^2(s)), \ s \in \mathbf{S}\}$$

$$\text{mit } \mathbf{y}(u^1(s_i), u^2(s_i)) = \mathbf{x}_i, \ i = 1, 2$$

$$\text{und o.B.d.A. } s_1 < s_2 \ \text{ natürlicher Parameter}$$

definiert, die die kürzeste Verbindung dieser beiden Punkte auf der Fläche darstellt. Es soll zusätzlich eine beliebige Vektorfunktion $\underline{v}(t) = (v^1(t), v^2(t))^T$ mit $\underline{v}(t = s_i) = 0, \ i = 1, 2$ betrachtet werden, durch welche sich eine beliebig vorgebbare Funktion

$$\underline{u}_\epsilon(t) = \underline{u}(t) + \epsilon\underline{v}(t)$$

definieren läßt. Daraus resultiert eine neue, von $\mathbf{y}(t)$ verschiedene Flächenkurve

$$\Gamma_\epsilon = \{\bar{\mathbf{y}} : \ \bar{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{x}(u^1_\epsilon(t), u^2_\epsilon(t)), \ t \in \mathbf{S}\}$$

Die Bogenlänge L_ϵ des Kurvenstückes Γ_ϵ bestimmt sich nach (3.3-2) durch

$$L_\epsilon = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\dot{\underline{u}}_\epsilon^T \mathbf{G}_\epsilon \dot{\underline{u}}_\epsilon} \, dt.$$

Da für $\epsilon \to 0$ auch $\underline{u}_\epsilon \to \underline{u}$ und somit, da $\underline{u}$ die kürzeste Verbindung ist, die Länge L_ϵ des Kurvenstückes für $\epsilon = 0$ ihr Minimum annimmt, muß L_ϵ somit die notwendige Bedingung für ein Extrema erfüllen.

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} L_\epsilon \right|_{\epsilon=0} = 0 \ \forall \underline{v}(t)$$

Daraus lassen sich nun die folgenden Überlegungen ableiten.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{d\epsilon}\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{\underline{\dot u}_\epsilon^T\mathbf{G}_\epsilon\underline{\dot u}_\epsilon}\;dt\Bigg|_{\epsilon=0}\\
&= \int_{s_1}^{s_2}\frac{d}{d\epsilon}\sqrt{\underline{\dot u}_\epsilon^T\mathbf{G}_\epsilon\underline{\dot u}_\epsilon}\;\Bigg|_{\epsilon=0}\;dt\\
&= \int_{s_1}^{s_2}\frac{\underline{\dot u}_\epsilon^T(\mathbf{G}_\epsilon)_{,k}\underline{\dot u}_\epsilon\frac{du_\epsilon^k}{d\epsilon}+2\underline{\dot u}_\epsilon^T\mathbf{G}_\epsilon\frac{d\underline{\dot u}_\epsilon}{d\epsilon}}{2\sqrt{\underline{\dot u}_\epsilon^T\mathbf{G}_\epsilon\underline{\dot u}_\epsilon}}\Bigg|_{\epsilon=0}\;dt\\
0 &= \int_{s_1}^{s_2}\frac{1}{2}(\underline{\dot u}^T\mathbf{G}_{,k}\underline{\dot u}\;v^k+2\underline{\dot u}^T\mathbf{G}\underline{\dot v})\;dt\\
&= \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\underline{\dot u}^T\mathbf{G}_{,k}\underline{\dot u}\;v^k dt+\underbrace{\underline{\dot u}^T\mathbf{G}\underline{v}\Big|_{s_1}^{s_2}}_{=0,\;\underline{v}(s_i)=0}-\int_{s_1}^{s_2}(\underline{\dot u}^T\mathbf{G})^{\cdot}\underline{v}\;dt\\
&= \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}(\dot u^i g_{ij,k}\dot u^j-2(\dot u^i g_{ij})^{\cdot})\;v^k\;dt
\end{aligned}$$

Da $\underline{v}(t)$ beliebig gewählt werden kann, kann die Bedingung nach dem Fundamentallema der Variationsrechnung (siehe [Bronst]) nur erfüllt sein, wenn

$$0=\dot u^i g_{ij,k}\dot u^j-2(\dot u^i g_{ij})^{\cdot}\;.$$

Da für $\epsilon=0$ der Parameter s der natürliche Parameter ist, kann die Ableitung nach s wieder mit $u^{i'}$ verdeutlicht werden.

$$\begin{aligned}
0 &= u^{i'}g_{ij,k}u^{j'}-2(u^{i'}g_{ij})'\\
&= u^{i'}g_{ij,k}u^{j'}-2u^{i'}u^{j'}g_{ik,j}-2u^{i''}g_{ik}\\
&= u^{i'}u^{j'}g_{ij,k}-u^{i'}u^{j'}\underbrace{g_{ik,j}}_{=g_{ki,j}}-\underbrace{u^{i'}u^{j'}g_{ik,j}}_{=u^{j'}u^{i'}g_{jk,i}}-2u^{i''}g_{ik}\\
&= u^{i'}u^{j'}(g_{ij,k}-g_{ki,j}-g_{jk,i})-2u^{i''}g_{ik}\\
\Rightarrow 0 &= 2u^{i''}g_{ik}+u^{i'}u^{j'}(g_{ki,j}+g_{jk,i}-g_{ij,k})\\
\Rightarrow 0 &= \underbrace{\delta_{tk}}g_{th}g^{hk}u^{i''}g_{ik}+\frac{\delta_{tk}}{2}(g_{ki,j}+g_{jk,i}-g_{ij,k})u^{i'}u^{j'}\\
&= g_{th}\underbrace{\underbrace{g^{hk}g_{ik}}_{=\delta_{hi}}u^{i''}}_{u^{h''}}+g_{th}\frac{g^{hk}}{2}(g_{ki,j}+g_{jk,i}-g_{ij,k})u^{i'}u^{j'}\\
&= g_{th}(u^{h''}+\underbrace{\frac{g^{hk}}{2}(g_{ki,j}+g_{jk,i}-g_{ij,k})}_{=\Gamma^h_{ij}\text{nach (3.5-3)}}u^{i'}u^{j'})
\end{aligned}$$

Demnach gilt

$$u^{h''} + \Gamma^h_{ij} u^{i'} u^{j'} = 0$$

und nach Satz 3.6.1 ist demzufolge das Kurvenstück geodätisch, woraus sich die folgende von Bernoulli aufgestellte Behauptung ergibt.

Satz 3.6.2 (Die kürzeste Verbindung zweier Flächenpunkte (Johann Bernoulli, 1697)) *Eine kürzeste Verbindung zweier Punkte ist stets Teil einer geodätischen Linie der Fläche. [Klotz2]*

Beweis: Der Beweis wurde bereits in der vorausgegangenen Betrachtung erbracht.

Bemerkung: Das Beispiel (siehe Seite 76) der Schraubenlinien auf einem Zylinder zeigt, daß die obige Bedingung nur notwendig, jedoch nicht hinreichend für die kürzeste Verbindung ist, da zwei Punkte auf einem Zylinder, die nicht auf einem Breitenkreis liegen unendlich viele Verbindungen durch Schraubenlinien haben, die nicht alle die kürzesten sind. Ebenso, wird jeder Breitenkreis auf einem Zylinder, durch zwei auf ihm liegende Punkte in zwei Teile unterteilt, wobei, wenn sie unterschiedliche Länge haben, nur eines der kürzeste ist. Wenn jedoch beide Teile die selbe Länge aufweisen, so kann die kürzeste Verbindung nicht eindeutig bestimmt werden, woraus folgt, das es nicht notwendig eine eindeutige kürzeste Verbindung zweier Flächenpunkte gibt.

3.6.2 Allgemeines Studium der geodätischen Linien auf Rotationsflächen

Es soll die Rotationsfläche

$$F = \{\mathbf{x} :\ \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2),\ (u^1, u^2) \in \mathbf{I}\} \quad \text{mit } \mathbf{x}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} r(u^1)\cos(u^2) \\ r(u^1)\sin(u^2) \\ u^1 \end{pmatrix}$$

untersucht werden. Die erste metrische Fundamentalgröße ergibt sich aus

$$\mathbf{x}_{,1} = \begin{pmatrix} r'(u^1)\cos(u^2) \\ r'(u^1)\sin(u^2) \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{x}_{,2} = \begin{pmatrix} -r(u^1)\sin(u^2) \\ r(u^1)\cos(u^2) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 + (r'(u^1))^2 & 0 \\ 0 & r^2(u^1) \end{pmatrix},\ \mathbf{G}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/(1 + (r'(u^1))^2) & 0 \\ 0 & 1/r^2(u^1) \end{pmatrix}. \tag{3.6-6}$$

Somit ergeben sich die Christoffel-Symbole nach

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{km}(g_{mi,j} + g_{jm,i} - g_{ij,m})$$

als

$$\Gamma^1_{11} = \frac{r'(u^1)r''(u^1)}{1+r'(u^1)^2} \qquad \Gamma^1_{12} = 0 \qquad \Gamma^1_{22} = -\frac{r(u^1)r'(u^1)}{1+r'(u^1)^2}$$

$$\Gamma^2_{11} = 0 \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{r'(u^1)}{r(u^1)} \qquad \Gamma^2_{22} = 0$$

Im weiteren soll eine Kurve

$$\Gamma = \{\mathbf{y} :\ \mathbf{y}(s) = \mathbf{x}(u^1(s), u^2(s)),\ s \in \mathbf{S}\}$$

untersucht werden. s sei der natürliche Parameter des Kurvenstückes Γ. Woraus die Bedingung folgt

$$1 = |\mathbf{y}'|^2 = |\mathbf{x}_{,i} u^{i'}|^2 = (\mathbf{x}_{,i} u^{i'}, \mathbf{x}_{,j} u^{j'}) = g_{ij} u^{i'} u^{j'}$$

da für Rotationsflächen nach (3.6-6) $g_{ij} \neq 0$ wenn $i = j$ gilt, folgt

$$1 = (1 + (r'(u^1))^2)(u^{1'})^2 + r^2(u^1)(u^{2'})^2 \tag{3.6-7}$$

Aus der hinreichenden Bedingung Satz (3.6.1) einer geodätischen Linie geht hervor,

$$\begin{aligned}
\mathbf{k=1)} \quad 0 &= u^{1''} + u^{j'}u^{k'}\Gamma^1_{jk} = u^{1''} + u^{1'}u^{1'}\Gamma^1_{11} + 2u^{1'}u^{2'}\Gamma^1_{12} + u^{2'}u^{2'}\Gamma^1_{22} \\
&= u^{1''} + (u^{1'})^2 \frac{r'(u^1)r''(u^1)}{1+r'(u^1)^2} + (u^{2'})^2 \frac{r(u^1)r'(u^1)}{1+r'(u^1)^2} \qquad (3.6\text{-}8) \\
\mathbf{k=2)} \quad 0 &= u^{2''} + u^{j'}u^{k'}\Gamma^2_{jk} = u^{2''} + u^{1'}u^{1'}\Gamma^2_{11} + 2u^{1'}u^{2'}\Gamma^2_{12} + u^{2'}u^{2'}\Gamma^2_{22} \\
&= u^{2''} + 2u^{1'}u^{2'}\frac{r'(u^1)}{r(u^1)} \qquad (3.6\text{-}9)
\end{aligned}$$

- Bereits in dem Beispiel der Rotationsflächen auf Seite 74 wurde herausgearbeitet, daß die Meridiane geodätische Linien sind. Dies soll durch die Erfüllung der beiden hinreichenden Bedingungen (3.6-8) und (3.6-9) untermauert werden. Da bei Meridianen $u^2 = c_2 = const$ und somit $u^{2'} = 0$ folgt, ist die Bedingung (3.6-9) trivialer weise erfüllt. Da nach (3.6-7) folgt

  $$1 = (1+(r')^2)(u^{1'})^2,$$

  folgt nach Ableiten der Gleichung nach s

  $$\begin{aligned}
  0 &= 2r'r''u^{1'}(u^{1'})^2 + (1+(r')^2)2u^{1'}u^{1''} \\
  &= \frac{r'r''}{1+(r')^2}(u^{1'})^2 + u^{1''}.
  \end{aligned}$$

  Da $u^{2'} = 0$ ist demnach die Bedingung (3.6-8) erfüllt. Demnach sind die Meridiane geodätische Linien.

- Für geodätische Linien folgt aus (3.6-9) die Beziehung

  $$\begin{aligned}
  0 &= u^{2''} + 2u^{1'}u^{2'}\frac{r'}{r} \\
  &= r^2u^{2''} + 2rr'u^{1'}u^{2'} \\
  &= (r^2u^{2'})'.
  \end{aligned}$$

  Demnach ergibt sich die Bedingung $r^2u^{2'} = const \; \forall s$ entlang geodätischer Linien.

- Betrachtet man den Winkel Θ zwischen Breitenkreisen und geodätischen Linien $\mathbf{y}(s)$

  $$\cos(\Theta) = \frac{(\mathbf{x}_{,2}, \mathbf{y}'(s))}{|\mathbf{x}_{,2}|\underbrace{|\mathbf{y}'(s)|}_{=1}} = \frac{(\mathbf{x}_{,2}, (u^{1'}\mathbf{x}_{,1} + u^{2'}\mathbf{x}_{,2}))}{|\mathbf{x}_{,2}|} = \frac{u^{2'}g_{22}}{\sqrt{g_{22}}} = u^{2'}r \ ,$$

  so folgt also $r\cos(\Theta) = const$ entlang einer geodätischen Linie.

Satz 3.6.3 (Clairantsche Relation) *Entlang einer geodätischen Linie*

$$\Gamma = \{\mathbf{y}: \ \mathbf{y}(s) = \mathbf{x}(u^1(s), u^2(s)), \ s \in \mathbf{S}\}$$

auf einer Rotationsfläche

$$F = \{\mathbf{x}: \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2), \ (u^1, u^2) \in \mathbf{I}\} \qquad \textit{mit } \mathbf{x}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} r(u^1)\cos(u^2) \\ r(u^1)\sin(u^2) \\ u^1 \end{pmatrix}$$

gilt die folgende Beziehung.

$$r\cos(\Theta) = const$$

Dabei ist Θ der Winkel zwischen der geodätischen Linie und den Breitenkreisen vom Radius $r = r(u^1)$.

Folgerung: 1) Für einen Zylinder gilt $r(u^1) = const$, demzufolge muß nach der Clairantschen Relation $\cos(\Theta) = const$ erfüllt werden, was einer Schraubenlinie bzw. ihren Grenzfällen den Breitenkreisen und den Meridianen entspricht. Siehe dazu Beispiel auf Seite 76.
2) Ist bei Rotationsflächen $r(u^1)$ monoton wachsend in u^1, geht sogar $r(u^1)$ mit u^1 gegen Unendlich, so muß $\cos(\Theta) \to 0$ für $u^1 \to \infty$ entlang einer geodätischen Linie. Demnach gilt $\Theta \to \pi/2$. Dies bedeutet, daß die geodätische Linie mit wachsendem u^1 gegen einen Meridian konvergiert wie z.B. bei einem Kegel (siehe dazu das Beispiel auf Seite 91). Eventuell umrundet aber die geodätische Linie unendlich oft die Rotationsachse. Hierfür ist als Beispiel das Rotationsparaboloid anzuführen.

Bemerkung: Die geodätische Linie gehört zur inneren Geometrie der Fläche (siehe Kapitel 3.8).

3.7 Minimalflächen

Definition 3.7.1 (Minimalfläche) *Die Fläche*

$$F = \{\mathbf{x}: \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2), \ (u^1, u^2) \in \mathbf{I}\},$$

die die geschlossene Kurve

$$\Gamma = \{\mathbf{y}: \ \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(u^1(t), u^2(t)); \ t \in \mathbf{T}\}$$

als Rand enthält und minimalen Flächeninhalt aufweist, wird als Minimalfläche zum Rand $\delta F = \Gamma$ bezeichnet. (Lagrange 1760)

Betrachtung: Es sei die Fläche

$$F = \{\mathbf{x}: \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2), \ (u^1, u^2) \in \mathbf{I}\},$$

die eine Minimalfläche zur Kurve

$$\Gamma = \{\mathbf{y}: \ \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(u^1(t), u^2(t)); \ t \in \mathbf{T}\}$$

ist, gegeben. Und es soll eine von der Minimalfläche F verschiedene Fläche $\tilde{F}$ mit der Darstellung

$$\tilde{F} = \{\tilde{\mathbf{x}}: \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2) + \epsilon\lambda(u^1, u^2)\mathbf{f}(u^1, u^2), \ \forall\lambda(u^1, u^2): \ \lambda(u^1, u^2)|_{\delta\mathbf{I}} = 0, \ \forall(u^1, u^2) \in \mathbf{I}\}$$

untersucht werden. $\mathbf{f}(u^1, u^2)$ sei dabei die Flächennormale von $\mathbf{x}(u^1, u^2)$. Beide Flächen besitzen demnach den selben Rand.

$$\delta F = \delta\tilde{F}$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}}_{,i} &= \mathbf{x}_{,i} + \epsilon\lambda_{,i}\mathbf{f} + \epsilon\lambda\mathbf{f}_{,i} \\
& \quad \text{nach der Ableitungsgeleichung von Weingarten folgt} \\
&= \mathbf{x}_{,i} + \epsilon\lambda_{,i}\mathbf{f} + \epsilon\lambda l_{ik}g^{kl}\mathbf{x}_{,l} + \epsilon\lambda\beta_i\mathbf{f} \\
&= \mathbf{x}_{,i} + \underbrace{(\epsilon\lambda_{,i} + \epsilon\lambda\beta_i)}_{\gamma_i}\mathbf{f} + \epsilon\lambda l_{ik}g^{kl}\mathbf{x}_{,l} \\
&= \mathbf{x}_{,i} + \gamma_i\mathbf{f} + \epsilon\lambda l_{ik}g^{kl}\mathbf{x}_{,l} \\
\tilde{g}_{ij} &= (\tilde{\mathbf{x}}_{,i}, \tilde{\mathbf{x}}_{,j}) \\
&= (\mathbf{x}_{,i} + \gamma_i\mathbf{f} + \epsilon\lambda l_{ik}g^{kl}\mathbf{x}_{,l} \ , \ \mathbf{x}_{,j} + \gamma_j\mathbf{f} + \epsilon\lambda l_{jm}g^{mn}\mathbf{x}_{,n}) \\
&= \underbrace{(\mathbf{x}_{,i}, \mathbf{x}_{,j})}_{=g_{ij}} + \gamma_j\underbrace{(\mathbf{x}_{,i}, \mathbf{f})}_{=0} \underbrace{-\epsilon\lambda\, l_{jm}\underbrace{g^{mn}\underbrace{(\mathbf{x}_{,i}, \mathbf{x}_{,n})}_{=g_{in}=g_{ni}}}_{=\delta_{mi}}}_{=l_{ji}} + \gamma_i\underbrace{(\mathbf{f}, \mathbf{x}_{,j})}_{=0} + \gamma_i\gamma_j\underbrace{(\mathbf{f}, \mathbf{f})}_{=1} \\
& \quad -\gamma_i\epsilon\lambda l_{jm}g^{mn}\underbrace{(\mathbf{f}, \mathbf{x}_{,n})}_{=0} \underbrace{-\epsilon\lambda\, l_{ik}\underbrace{g^{kl}\underbrace{(\mathbf{x}_{,l}, \mathbf{x}_{,j})}_{=g_{lj}}}_{=\delta_{kj}}}_{=l_{ij}} - \epsilon\lambda l_{ik}g^{kl}\gamma_j\underbrace{(\mathbf{x}_{,l}, \mathbf{f})}_{=0} + \epsilon^2\lambda^2 l_{ik}g^{kl}l_{jm}g^{mn}(\mathbf{x}_{,l}, \mathbf{x}_{,n}) \\
&= g_{ij} - \epsilon\lambda l_{ji} + \gamma_i\gamma_j - \epsilon\lambda l_{ij} + O(\epsilon^2) \\
&= g_{ij} + \gamma_i\gamma_j - 2\epsilon\lambda l_{ij} + O(\epsilon^2) \\
& \quad \gamma_i = \epsilon\lambda_{,i} + \epsilon\lambda\beta_i \\
&= g_{ij} + (\epsilon\lambda_{,i} + \epsilon\lambda\beta_i)(\epsilon\lambda_{,j} + \epsilon\lambda\beta_j) - 2\epsilon\lambda l_{ij} + O(\epsilon^2) \\
&= g_{ij} + \underbrace{(\epsilon\lambda_{,i} + \epsilon\lambda\beta_i)(\epsilon\lambda_{,j} + \epsilon\lambda\beta_j)}_{=O(\epsilon^2)} - 2\epsilon\lambda l_{ij} + O(\epsilon^2) \\
&= g_{ij} - 2\epsilon\lambda l_{ij} + O(\epsilon^2) \\
det(\tilde{\mathbf{G}}) &= \tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22} - \tilde{g}_{12}^2 \\
&= (g_{11} - 2\epsilon\lambda l_{11} + O(\epsilon^2))(g_{22} - 2\epsilon\lambda l_{22} + O(\epsilon^2)) + (g_{12} - 2\epsilon\lambda l_{12} + O(\epsilon^2))^2 \\
&= g_{11}g_{22} - 2\epsilon\lambda(g_{11}l_{22} + l_{11}g_{22})\underbrace{(4\epsilon^2\lambda^2 l_{11}l_{22} + O(\epsilon^2))}_{=O(\epsilon^2)} - g_{12}^2 - 4\epsilon\lambda g_{12}l_{12}\underbrace{(4\epsilon^2\lambda^2 l_{12}^2 + O(\epsilon^2))}_{=O(\epsilon^2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \underbrace{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}_{=det(\mathbf{G})} - 4\epsilon\lambda \underbrace{(\frac{1}{2}g_{11}l_{22} + \frac{1}{2}l_{11}g_{22} + g_{12}l_{12})}_{H det(\mathbf{G})} + O(\epsilon^2) \\
&= det(\mathbf{G})(1 - 4\epsilon\lambda H) \\
d\tilde{A}_O &= \sqrt{det(\tilde{\mathbf{G}})} \\
&= \sqrt{det(\mathbf{G})(1 - 4\epsilon\lambda H + O(\epsilon^2))} \\
&= dA_O\sqrt{1 - 4\epsilon\lambda H + O(\epsilon^2)} \\
&\quad (1 - 2\epsilon\lambda H + O(\epsilon^2))^2 = (1 - 2\epsilon\lambda H + O(\epsilon^2)) - 2\epsilon\lambda H + 4\epsilon^2\lambda^2 H^2 + O(\epsilon^2) \\
&= dA_O(1 - 2\epsilon\lambda H + O(\epsilon^2))
\end{aligned}
$$

Da F Minimalfläche ist, ist der Flächeninhalt A_O von F für alle $\epsilon \neq 0$ kleiner als der von der Fläche $\tilde{F}$.

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbf{I}} dA_O\ du^1u^2 &< \int_{\mathbf{I}} d\tilde{A}_O\ du^1u^2 \\
&= \int_{\mathbf{I}} dA_O(1 - 2\epsilon\lambda H + O(\epsilon^2))\ du^1u^2 \\
&= \int_{\mathbf{I}} dA_O\ du^1u^2 - \underbrace{\int_{\mathbf{I}} dA_O\ 2\epsilon\lambda H\ du^1u^2}_{\geq 0} + \int_{\mathbf{I}} dA_O\ O(\epsilon^2)\ du^1u^2
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \underbrace{\int_{\mathbf{I}} dA_O\ \lambda\ H\ du^1u^2}_{\geq 0 \text{ und unabhängig von } \epsilon} \quad < \quad O(\epsilon) \underbrace{\int_{\mathbf{I}} dA_O\ du^1u^2}_{A_O = const \text{ bzgl. } \epsilon}, \qquad \forall \epsilon \neq 0
$$

Da der Flächeninhalt der Minimalfläche nicht Null ist, gilt $dA_O \neq 0$. Außerdem ist $\lambda(u^1, u^2)$ frei wählbar. Somit kann die obige Beziehung nur dann für alle $\epsilon \neq 0$ erfüllt werden, wenn die Mittlere Krümmung $H(u^1, u^2) = 0\ \forall (u^1, u^2)$ ist.

Bemerkung: Aus [Jost] geht hervor, daß nicht nur aus der Eigenschaft einer Fläche Minimalfläche zu sein die Bedingung $H = 0$ folgt, sondern daß die Umkehrung ebenfalls gilt. Demzufolge erhält man auch eine hinreichende Bedingung einer Minimalfläche

Satz 3.7.1 (Hinreichende und notwendige Bedingung einer Minimalfläche)

$$F = \{\mathbf{x} :\ \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2),\ (u^1, u^2) \in \mathbf{I}\},$$

sei eine Fläche mit der Begrenzungskurve δF (glatt und geschlossene Kurve). Dann hat F minimalen Flächeninhalt aller Flächen mit gleicher Begrenzungskurve, F ist eine Minimalfläche, genau dann wenn gilt

$$H(u^1, u^2) = 0\ \forall (u^1, u^2) \in \mathbf{I}.$$

Beweis: Der Beweis der Notwendigkeit, wurde bereits in der vorhergehenden Betrachtung erbracht. Der Nachweis, daß dies eine hinreichende Bedingung ist, ist im [Jost] nachzulesen.

Bemerkung: Die Mittlere Krümmung in einem Punkt einer Fläche kann nur Null sein, wenn für die Hauptkrümmungen λ_1 und λ_2 entweder $\lambda_1 = -\lambda_2 \neq 0$ gilt, dann ist die Gaußsche Krümmung $K = \lambda_1\lambda_2 < 0$ und der Flächenpunkt somit hyperbolisch (vgl. mit Def. 3.4.6), oder die Hauptkrümmungen sind identisch Null $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, dann ist die Gaußsche Krümmung ebenfalls Null, der Flächenpunkt ist somit parabolisch und sogar ein Flachpunkt. Dies bedeutet, daß eine Minimalfläche keine elliptischen Punkte enthalten kann.

Betrachtung: Nachdem ein hinreichendes Kriterium für Minimalflächen geschaffen wurde, stellt sich die Frage, wie solche Flächen zu gegebenen Raumkurven konstruiert werden können. Es ist eine Kurve

$$\Gamma = \{\mathbf{y} : \ \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(u^1(t), u^2(t)); \ t \in \mathbf{T}\}$$

als Rand der zu konstruierenden Minimalfläche gegeben. Daraus läßt sich in der Parameterebene (u_1-u_2-Ebene) eine Kurve

$$\gamma = \{\underline{u} : \ \underline{u}(t) = (u^1(t), u^2(t))^T; \ t \in \mathbf{T}\}$$

konstruieren, die das Gebiet ω einschließt. Weiterhin läßt sich aus der hinreichenden Bedingung $H = 0$ eine partielle Differentialgleichung konstruieren.

$$\begin{aligned}
H &= \frac{(l_{22}g_{11} + l_{11}g_{22} - 2g_{12}l_{12})}{2\ det(\mathbf{G})} \qquad \text{nach (3.4-8)} \\
&= \frac{[(\mathbf{x}_{,22}, \mathbf{f})(\mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,1}) + (\mathbf{x}_{,11}, \mathbf{f})(\mathbf{x}_{,2}, \mathbf{x}_{,2}) - 2(\mathbf{x}_{,12}, \mathbf{f})(\mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,2})]}{2[(\mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,1})(\mathbf{x}_{,2}, \mathbf{x}_{,2}) - (\mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,2})^2]} \\
& \quad \text{nach (3.1.6) } \mathbf{f} = \frac{\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}}{|\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}|} \text{ folgt} \\
&= \frac{\left([(\mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,1})\mathbf{x}_{,22} + (\mathbf{x}_{,2}, \mathbf{x}_{,2})\mathbf{x}_{,11} - 2(\mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,2})\mathbf{x}_{,12}], \frac{\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}}{|\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}|}\right)}{2[(\mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,1})(\mathbf{x}_{,2}, \mathbf{x}_{,2}) - (\mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,2})^2]} = 0
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nun das zu lösende Randwertproblem.

Gesucht ist die Parameterdarstellung $\mathbf{x}(u^1, u^2)$, so daß

$$\frac{\left([(\mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,1})\mathbf{x}_{,22} + (\mathbf{x}_{,2}, \mathbf{x}_{,2})\mathbf{x}_{,11} - 2(\mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,2})\mathbf{x}_{,12}], \frac{\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}}{|\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}|}\right)}{2[(\mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,1})(\mathbf{x}_{,2}, \mathbf{x}_{,2}) - (\mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,2})^2]} = 0 \qquad \forall (u^1, u^2) \in \omega$$

unter der Randbedingung $\qquad \mathbf{x}(u^1(t), u^2(t)) = \mathbf{y}(u^1(t), u^2(t)) \qquad \forall t \in \mathbf{T} \ \Leftrightarrow \ (u^1(t), u^2(t)) \in \gamma.$

Wie dieses Randwertproblem zu lösen ist, würde den Rahmen dieses Werkes sprengen, so daß dies in einschlägiger Literatur zum Lösen partieller Differentialgleichungen nachzulesen ist. ■

Beispiel: Wendelfläche

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} u^2 R\cos(u^1) \\ u^2 R\sin(u^1) \\ hu^1 \end{pmatrix}, \qquad (u^1, u^2) \in [-\infty, \infty] \times [-1, 1] = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{x}_{,1} = \begin{pmatrix} -u^2 R\sin(u^1) \\ u^2 R\cos(u^1) \\ h \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{,2} = \begin{pmatrix} R\cos(u^1) \\ R\sin(u^1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

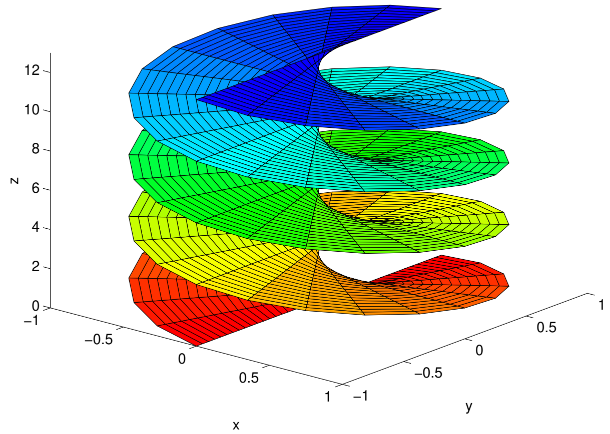
$$\mathbf{x}_{,11} = \begin{pmatrix} -u^2 R\cos(u^1) \\ -u^2 R\sin(u^1) \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{,22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{,12} = \begin{pmatrix} -R\sin(u^1) \\ R\cos(u^1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} h\sin(u^1) \\ -h\cos(u^1) \\ u^2 R \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} {u^2}^2 R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & -hR \\ -hR & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2\,det(\mathbf{G})}(\underbrace{l_{11}}_{=0} g_{22} + \underbrace{l_{22}}_{=0} g_{11} - 2l_{12} \underbrace{g_{12}}_{=0}) = 0$$



■

Beispiel: Rotationsfläche

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r(u^1)\cos(u^2) \\ r(u^1)\sin(u^2) \\ u^1 \end{pmatrix}, \qquad (u^1, u^2) \in (-\infty, \infty) \times [-\pi, \pi] = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{x}_{,1} = \begin{pmatrix} r'(u^1)\sin(u^2) \\ r'(u^1)\cos(u^2) \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{,2} = \begin{pmatrix} -r(u^1)\sin(u^2) \\ r(u^1)\cos(u^2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{,11} = \begin{pmatrix} r''(u^1)\sin(u^2) \\ r''(u^1)\cos(u^2) \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{,22} = \begin{pmatrix} r(u^1)\cos(u^2) \\ r(u^1)\sin(u^2) \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{,12} = \begin{pmatrix} -r'(u^1)\sin(u^2) \\ r'(u^1)\cos(u^2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\sqrt{(1 + r'(u^1)^2}} \begin{pmatrix} -\cos(u^2) \\ -\sin(u^2) \\ r'(u^1) \end{pmatrix}, \ \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 + r'(u^1)^2 & 0 \\ 0 & r(u^1) \end{pmatrix}, \ \mathbf{L} = \frac{1}{\sqrt{(1 + r'(u^1)^2}} \begin{pmatrix} -r''(u^1) & 0 \\ 0 & r(u^1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H &= \frac{1}{2\,det(\mathbf{G})}(l_{11}g_{22} + l_{22}g_{11} - 2l_{12}g_{12}) \\ &= \frac{1}{2\,det(\mathbf{G})}(\frac{-r''r^2 + r(1 + r'^2)}{\sqrt{1 + r'^2}}) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Bedingung für eine Rotationsfläche Minimalfläche zu sein als

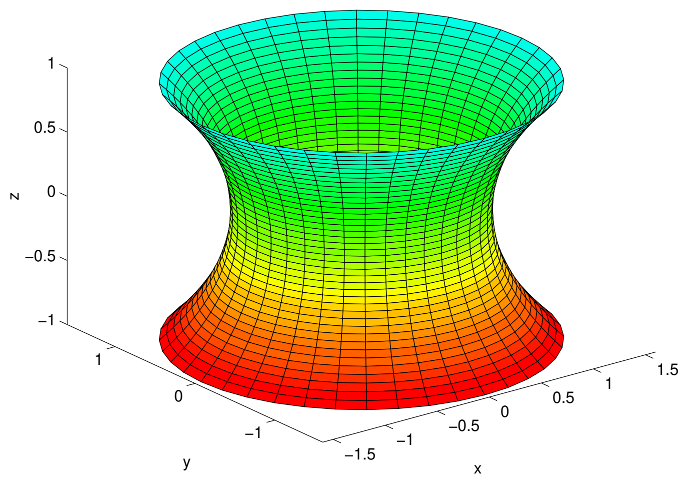
$$1 + r'^2 - rr'' = 0 \quad \text{(Dgl. der Kettenlinie)}$$

$$\Rightarrow \qquad r(z) = a\cosh(z/a)$$

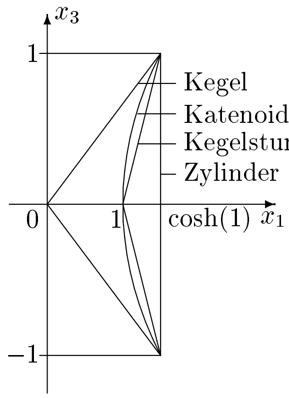
mit entsprechenden Randbedingungen. Demnach ergibt sich eine Rotationsfläche mit minimaler Oberfläche durch die Parameterdarstellung

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a\cosh(u^1/a)\cos(u^2) \\ a\cosh(u^1/a)\sin(u^2) \\ u^1 \end{pmatrix}$$

$$(u^1, u^2) \in [-\infty, \infty] \times [-\pi, \pi) = \mathbf{I}.$$



Diese Fläche wird als Katenoid bezeichnet.
Im weiteren soll der Oberflächeninhalt des Katenoids mit denen des Zylinders und des Kegels verglichen werden, die alle bei $x_3 = u^1 = \pm 1$ den selben Radius aufweisen sollen. Das Katenoid soll mit dem Parameter $a = 1$ gegeben sein.



$$\mathbf{x}_{,1} = \begin{pmatrix} \sinh(u^1)\cos(u^2) \\ \sinh(u^1)\sin(u^2) \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_{,2} = \begin{pmatrix} -\cosh(u^1)\sin(u^2) \\ \cosh(u^1)\cos(u^2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \sinh^2(u^1)+1 & 0 \\ 0 & \cosh^2(u^1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh^2(u^1) & 0 \\ 0 & \cosh^2(u^1) \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich für $r = \cosh(\pm 1), \bar{r} = \cosh(0) = 1$ und $h = 2$

$$A_O \text{ Katenoid} = \int_{\mathbf{I}} \sqrt{det(\mathbf{G})}\, du^1 du^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-1}^{1} \cosh^2(u^1) du^1 du^2 = 17{,}68$$

$$A_O \text{ Zylinder} = 2\pi r h = 2\pi \cosh(1) 2 = 19{,}39$$

$$A_O \text{ Kegel} = 2\pi r \sqrt{r^2 + (h/2)^2} = 2\pi \cosh(1)\sqrt{\cosh^2(1)+1} = 17{,}83$$

$$A_O \text{ Kegelstumpf} = 2\pi(r+\bar{r})\sqrt{(r-\bar{r})^2 + (h/2)^2} = 2\pi(\cosh(1)+1)\sqrt{(\cosh(1)-1)^2+1} = 18{,}18$$

■

3.8 Die innerer Geometrie von Flächen

Als innere Geometrie von Flächen sei die Gesamtheit der Aussagen bezeichnet, die allein mit der 1. metrischen Fundamentalgröße $\mathbf{G}$ formuliert werden können.

Definition 3.8.1 (innergeometrische Größe) *Es sei $F = \{\mathbf{x} : \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2), \ (u^1, u^2) \in \mathbf{I}\}$ eine Fläche. Eine Größe $\nu(\mathbf{x})$ heißt innergeometrische Größe der Fläche F, wenn $\nu(\mathbf{x})$ ausschließlich von der 1. metrischen Fundamentalgröße $\mathbf{G}$ und deren Ableitungen abhängt.*

Beispiel: Die Bogenlänge einer Kurve

$$\Gamma = \{\mathbf{y} : \ \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(u^1(t), u^2(t)); \ t \in \mathbf{T}\}$$

auf der Fläche

$$F = \{\mathbf{x} : \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2), \ (u^1, u^2) \in \mathbf{I}\}$$

bestimmt sich nach (3.3-1) durch

$$ds = \sqrt{\underline{\dot{u}}^T \mathbf{G} \underline{\dot{u}}} dt \ \Rightarrow s(t) = \int_0^t \sqrt{\underline{\dot{u}}(\tau)^T \mathbf{G}(\tau) \underline{\dot{u}}(\tau)} d\tau$$

Betrachtet man nun den Spezialfall, daß die Kurve Γ gerade der Koordinatenlinie (3.1-1)

$$\Gamma_1 = \{\mathbf{y}_1 : \ \mathbf{y}_1(u^1) = \mathbf{x}(u^1, c_1 = \text{const}); \ (u^1, c_1) \in \mathbf{I}\} \ \text{ mit } \underline{u} = \begin{pmatrix} t \\ c_1 \end{pmatrix}, \ \underline{\dot{u}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

entspricht, so folgt

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{G}(\tau) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} d\tau$$

$$= \int_0^t \sqrt{g_{11}(\tau)}d\tau \ .$$

Analoges gilt für die anderen Koordinatenlinien Γ_2 (3.1-2). Dies bedeutet, daß die Bogenlänge der Koordinatenlinien eine innergeometrische Größe ist. ■

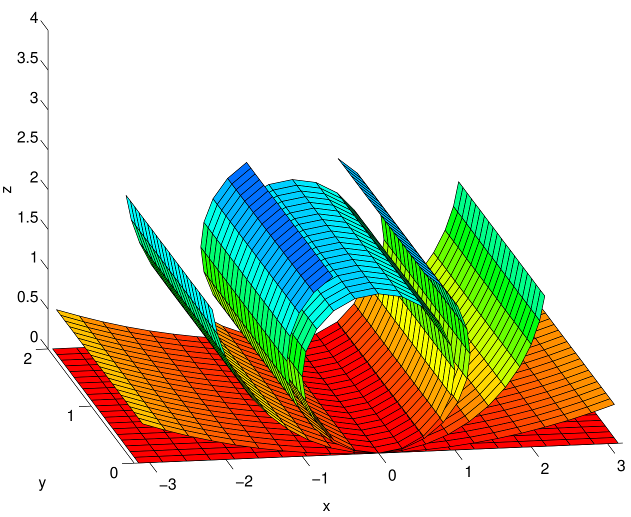
3.8.1 Abwickelbarkeit und Verbiegbarkeit

Definition 3.8.2 (abwickelbar bzw. verbiegbar) *Zwei Flächen*

$$\begin{aligned} F &= \{\mathbf{x} : \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2), \ (u^1, u^2) \in \mathbf{I}\} \\ \tilde{F} &= \{\tilde{\mathbf{x}} : \ \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}(u^1, u^2), \ (u^1, u^2) \in \mathbf{I}\} \end{aligned}$$

heißen aufeinander abwickelbar bzw. ineinander verbiegbar, wenn zwei Parametrisierungen existiern, die diese Flächen erzeugen, so daß $\mathbf{G}(u^1, u^2) = \tilde{\mathbf{G}}(u^1, u^2), \ \forall (u^1, u^2) \in \mathbf{I}$ *gilt. D.h. diese beiden Flächen besitzen die selbe innere Geometrie.*

Geometrische Deutung: Geometrisch kommt Abwickelbarkeit bzw. Verbiegbarkeit der Möglichkeit gleich, eine Fläche in eine andere verbiegen zu können, ohne eine Dehnung oder Stauchung einzelner differentieller Oberflächensegmente zu verursachen. Nimmt man z.B. ein Blatt Papier, welches keine Dehnung oder Stauchung zuläßt und einer Ebene entspricht, so kann man es zu einem Zylinder, einem (einseitigen) Kegel oder einer Tangentenfläche biegen ohne es zu knicken (Knicke entsprechen singulären Punkten). Dies verdeutlicht die Verbiegbarkeit. Man kann jedoch keine Kugeloberfläche daraus biegen. Eine gespannte Membran, z.B. aus Gummi, entspricht ebenfalls einer Ebene. Legt man eine Kugel hinein, so geht die Fläche zwar stückweise in eine Kugeloberfläche über, jedoch werden diese entsprechenden Flächensegmente gedehnt, was der Verbiegbarkeit entgegenspricht.



Bezeichnung: Die Begriffe abwickelbar und verbiegbar sind synonym, jedoch wird mit abwickelbar meißt die Verbiegbarkeit auf oder in eine Ebene gemeint.

Beispiel: Die drei Torsen, der Zylinder, der Kegel und die Tangentialfläche, sind in die Ebene abwickelbar. Dies soll für den Zylinder explizit gezeigt werden. Jeder Zylinder läßt sich o.B.d.A. durch die Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = \mathbf{x}_0(u^1) + u^2\mathbf{a} \quad \text{wobei} \quad \mathbf{x}_0 \text{ eine Ebene Kurve ist,}$$

$$u^1 \text{ der natürliche Parameter von } \mathbf{x}_0 \text{ d.h. } |\mathbf{x}_0'| = 1 \ \forall u^1$$

$$\mathbf{a} = const; \ \mathbf{a} \perp \mathbf{x}_0' \ \forall u^1 \text{ d.h. } \mathbf{a} \text{ steht senkrecht auf der Ebene,}$$
$$\text{in der die Kurve } \mathbf{x}_0 \text{ liegt}$$

$$|\mathbf{a}| = 1$$

$$\mathbf{x}_{,1} = \mathbf{x}_0'(u^1),\ \mathbf{x}_{,2} = \mathbf{a}$$

$$g_{11} = (\mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,1}) = (\mathbf{x}_0', \mathbf{x}_0') = \underbrace{|\mathbf{x}_0'(u^1)|}_{=1}^2 = 1$$

$$g_{12} = (\mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,2}) = \underbrace{(\mathbf{x}_0', \mathbf{a})}_{=0;\ \mathbf{a}\perp\mathbf{x}_0'} = 0$$

$$g_{22} = (\mathbf{x}_{,2}, \mathbf{x}_{,2}) = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \underbrace{|\mathbf{a}|}_{=1}^2 = 1$$

Eine Ebene hingegen läßt sich durch die folgende Parameterdarstellung charakterisieren, wobei die selbe 1. metrische Fundamentalgröße entsteht.

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{x}_{,1}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{x}_{,2}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$g_{11} = 1,\ g_{12} = 0,\ g_{22} = 1$$

Damit ist die Abwickelbarkeit des Zylinders auf eine Ebene gezeigt. ■

Bemerkung: 1) Verbiegbarkeit ineinander bzw. Abwickelbarkeit aufeinander ist eine Äquivalenzrelation. Dies bedeutet insbesondere, daß alle drei Torsen ineinander verbiegbar sind.
2) Nach Definition der Abwickelbarkeit ist die 1. metrische Fundamentalgröße gegenüber solchen Transformationen invariant. Dies bedeutet insbesondere, daß innergeometrische Größen, die ausschließlich aus der 1. metrischen Fundamentalgröße bestimmbar sind, ebenfalls invariant gegenüber dam Abwickeln oder Verbiegen sind. Siehe dazu das Beispiel des Kegels auf Seite 91.
3) Gibt es zwei Flächen F und $\tilde{F}$, die ineinander verbiegbar sind, so kann man eine Flächenschar F_α konstruieren, so daß jede Fläche dieser Schar in jede Fläche dieser Schar verbiegbar ist und $F_{(\alpha=0)} = F$ und $F_{(\alpha=c)} = \tilde{F}$ gilt.

Beispiel: Es soll gezeigt werden, daß die Katenoide in die Wendelfläche verbiegbar ist und es soll die zu gehöhrige Schar angegeben werden. Die Kathenoide (Index K) und die Wendelfläche (Index W) lassen sich durch die Parameterdarstellungen

$$\mathbf{x}_K(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} a\cosh(u^1/a)\cos(u^2) \\ a\cosh(u^1/a)\sin(u^2) \\ u^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_W(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) = \begin{pmatrix} \tilde{u}^2\cos(\tilde{u}^1 \\ \tilde{u}^2\sin(\tilde{u}^1) \\ a\tilde{u}^1 + a(\pi/2) \end{pmatrix}$$

darstellen. Betrachtet man die Fläche, die durch die Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}^\alpha(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} a\cosh(u^1/a)\cos(u^2)\cos(\alpha) & + & a\sinh(u^1/a)\sin(u^2)\sin(\alpha) \\ a\cosh(u^1/a)\sin(u^2)\cos(\alpha) & - & a\sinh(u^1/a)\cos(u^2)\sin(\alpha) \\ u^1\cos(\alpha) & + & au^2\sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

gegeben ist, so wird deutlich, daß zum einen für $\alpha = 0$ die Fläche F_0 mit der Parameterdarstellung $\mathbf{x}^0$ der Katenoide entspricht, und zum anderen für $\alpha = \pi/2$ diese Fläche in die Darstellung

$$\mathbf{x}^{\pi/2}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} a\sinh(u^1/a)\sin(u^2) \\ -a\sinh(u^1/a)\cos(u^2) \\ au^2\sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

übergeht. Durch die Koordinatentransformation

$$\tilde{u}^1 = u^2 - \pi/2,\ \tilde{u}^2 = a\sinh(u^1/a),$$

aus der

$$\sin(u^2) = \cos(\tilde{u}^1) \quad \text{und} \quad \cos(u^2) = -\sin(\tilde{u}^1)$$

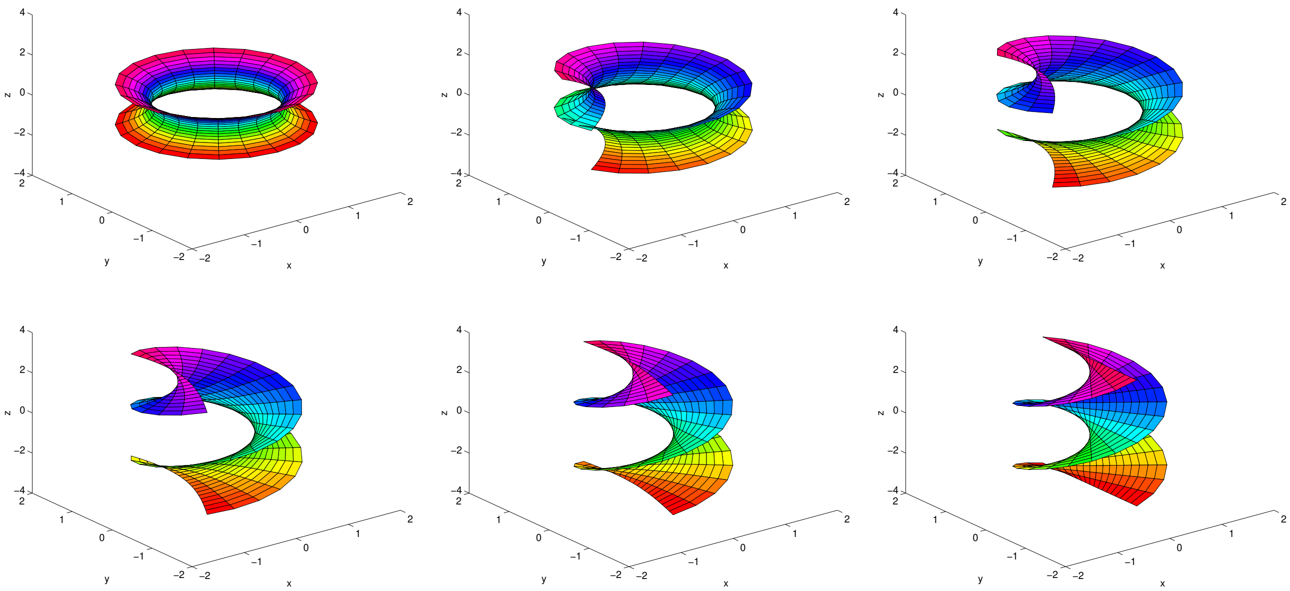
folgt, geht die Parameterdarstellung $\mathbf{x}^{\pi/2}(u^1, u^2)$ in die der Wendelfläche über. Es ist demnach eine Flächenschar $\mathbf{x}^{\alpha}(u^1, u^2)$konstruiert worden, die für $\alpha = 0$ der Katenoide und für $\alpha = \pi/2$ der Wendelfläche entspricht.
Um zu zeigen, daß die Katenoide, die Wendelfläche und die gesamte Flächenschar in sich verbiegbar sind, ist zu zeigen, daß die erste metrische Fundamentalgröße $G^{\alpha} = (g^{\alpha}_{ij})^{1}_{i,j=1} = ((\mathbf{x}^{\alpha}_{,i}, \mathbf{x}^{\alpha}_{,j}))^{2}_{i,j=1}$ unabhängig von dem Parameter α ist.

$$\mathbf{x}^{\alpha}_{,1}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} a\sinh(u^1/a)\cos(u^2)\cos(\alpha) & + & a\cosh(u^1/a)\sin(u^2)\sin(\alpha) \\ a\sinh(u^1/a)\sin(u^2)\cos(\alpha) & - & a\cosh(u^1/a)\cos(u^2)\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) & & \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}^{\alpha}_{,2}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} -a\cosh(u^1/a)\sin(u^2)\cos(\alpha) & + & a\sinh(u^1/a)\cos(u^2)\sin(\alpha) \\ a\cosh(u^1/a)\cos(u^2)\cos(\alpha) & + & a\sinh(u^1/a)\sin(u^2)\sin(\alpha) \\ & & a\sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} (\mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,1}) & (\mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,2}) \\ (\mathbf{x}_{,2}, \mathbf{x}_{,1}) & (\mathbf{x}_{,2}, \mathbf{x}_{,2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh^2(u^1/a) & 0 \\ 0 & a\cosh^2(u^1/a) \end{pmatrix}$$

Die folgenden Grafiken sollen den Vorgang des Abwickelns der Katenoide in die Wendelfläche verdeutlichen.



3.8.2 Weitere innergeometrische Größen

Betrachtung: Gemeinsam mit den Ableitungsgleichungen von Gauß (3.5-1) und (3.5-2) wurden die Christoffel-Symbole Γ^{k}_{ij} eingeführt. Im weiteren soll gezeigt werden, daß die Christoffel-Symbole innergeometrische Größen sind.
Multipliziert man die Gaußsche Ableitungsgleichung

$$\mathbf{x}_{,ij} = \Gamma^{k}_{ij}\mathbf{x}_{,k} + l_{ij}\mathbf{f}$$

unter Beachtung der Einsteinschen Summenkonvention mit $\mathbf{x}_{,m}$

$$(\mathbf{x}_{,m}, \mathbf{x}_{,ij}) = \Gamma^{k}_{ij} g_{km}$$

und weiter mit g^{mn}, wobei $g_{km}g^{mn} = \delta_{kn}$ (g^{mn} sind die Einträge der Inversen $\mathbf{G}^{-1}$ von $\mathbf{G}$), so erhält man

$$g^{mn}(\mathbf{x}_{,m}, \mathbf{x}_{,ij}) = \Gamma^{n}_{ij}.$$

Betrachtet man die Ableitung der ersten metrischen Fundamentalgröße g_{ij} nach den Parametern u^m so ergibt sich

$$g_{ij,m} = \frac{\partial}{\partial u^m} g_{ij} = \frac{\partial}{\partial u^m}(\mathbf{x}_{,i}, \mathbf{x}_{,j}) = (\mathbf{x}_{,im}, \mathbf{x}_{,j}) + (\mathbf{x}_{,i}, \mathbf{x}_{,jm}).$$

Daraus folgt die Berechenbarkeit der Christoffel-Symbole Γ^k_{ij} einzig aus der ersten metrischen Fundamentalgröße

$$\Gamma^n_{ij} = \frac{1}{2} g^{nm} \underbrace{(g_{mi,j} + g_{jm,i} - g_{ij,m})}_{2(\mathbf{x}_{,m}, \mathbf{x}_{,ij})} \tag{3.8-1}$$

demnach sind die Christoffelsymbole ebenfalls innergeometrische Größen. Das Problem bei der Bestimmung der Christoffel-Symbole durch die oben angegebenen Gleichungen besteht in der Bestimmung der Inversen g^{ij} der ersten metrischen Fundamentalgröße. ∎

Betrachtung: Die Gaußsche Krümmung (3.4-7) bzw. (3.4-9) ist ebenfalls eine innergeometrische Größe, was die folgende Betrachtung zeigen soll.
Nach dem Satz von Schwarz (siehe [Ficht1]) gilt die folgende Plausibilität.

$$\mathbf{x}_{,ijk} = \mathbf{x}_{,ikj} \tag{3.8-2}$$

Und aus den Ableitungsgleichungen von Gauß (3.5-1) und Weingarten (3.5-5)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{,ij} &= \Gamma^m_{ij}\mathbf{x}_{,m} + l_{ij}\mathbf{f}, \\ \mathbf{f}_{,i} &= -l_{ik}g^{kj}\mathbf{x}_{,j} \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{,ijk} &= \Gamma^r_{ij,k}\mathbf{x}_{,r} + \Gamma^r_{ij} \underbrace{\mathbf{x}_{,rk}}_{=\Gamma^s_{rk}\mathbf{x}_{,s} + l_{rk}\mathbf{f}} + l_{ij,k}\mathbf{f} + l_{ij} \underbrace{\mathbf{f}_{,k}}_{-l_{kl}g^{ls}\mathbf{x}_{,s}} \\ &= \Gamma^s_{ij,k}\mathbf{x}_{,s} + \Gamma^r_{ij}(\Gamma^s_{rk}\mathbf{x}_{,s} + l_{rk}\mathbf{f}) + l_{ij,k}\mathbf{f} - l_{ij}(l_{kl}g^{ls}\mathbf{x}_{,s}) \\ &= (\Gamma^s_{ij,k} + \Gamma^r_{ij}\Gamma^s_{rk} - l_{ij}l_{kl}g^{ls}\mathbf{x}_{,s} + (\Gamma^r_{ij}l_{rk} + l_{ij,k})\mathbf{f} \\ \mathbf{x}_{,ikj} &= (\Gamma^s_{ik,j} + \Gamma^r_{ik}\Gamma^s_{rj} - l_{ik}l_{jl}g^{ls}\mathbf{x}_{,s} + (\Gamma^r_{ik}l_{rj} + l_{ik,j})\mathbf{f} \end{aligned}$$

Demnach gilt wegen (3.8-2)

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{x}_{,ijk} - \mathbf{x}_{,ikj} \\ &= (\Gamma^s_{ij,k} + \Gamma^r_{ij}\Gamma^s_{rk} - l_{ij}l_{kl}g^{ls})\mathbf{x}_{,s} + (\Gamma^r_{ij}l_{rk} + l_{ij,k})\mathbf{f} - (\Gamma^s_{ik,j} + \Gamma^r_{ik}\Gamma^s_{rj} - l_{ik}l_{jl}\bar{g}_{ls})\mathbf{x}_{,s} - (\Gamma^r_{ik}l_{rj} + l_{ik,j})\mathbf{f} \\ &= \underbrace{((\Gamma^s_{ij,k} + \Gamma^r_{ij}\Gamma^s_{rk} - l_{ij}l_{kl}\bar{g}_{ls}) - (\Gamma^s_{ik,j} + \Gamma^r_{ik}\Gamma^s_{rj} - l_{ik}l_{jl}\bar{g}_{ls}))}_{G^s_{ijk}}\mathbf{x}_{,s} + \underbrace{((\Gamma^r_{ij}l_{rk} + l_{ij,k}) - (\Gamma^r_{ik}l_{rj} + l_{ik,j}))}_{C_{ijk}}\mathbf{f} \\ &= G^s_{ijk}\mathbf{x}_{,s} + C_{ijk}\mathbf{f} \end{aligned}$$

Da die Vektoren $\mathbf{x}_{,s}$ und $\mathbf{f}$ linear unabhängig sind, kann ein Koeffizientenvergleich durchgeführt werden. Und es ergibt sich das folgende Lemma.

Lemma 3.8.1 (Gleichungen von Gauß und Mainardi/Codazzi)

Gleichungen von Gauß: $0 = G^s_{ijk} \quad \forall i,j,k,s = 1,2$
Gleichungen von Mainardi/Codazzi: $0 = C_{ijk} \quad \forall i,j,k = 1,2$ *(1856/60)*

Die Bedingung $0 = C_{ijk}$ entspricht der ersten Integrabilitätsbedingung des Hauptsatzes der Flächentheorie. Aus der anderen Bedingung folgt

$$\begin{aligned} 0 &= (\Gamma^s_{ij,k} + \Gamma^r_{ij}\Gamma^s_{rk} - l_{ij}l_{kl}g^{ls}) - (\Gamma^s_{ik,j} + \Gamma^r_{ik}\Gamma^s_{rj} - l_{ik}l_{jl}\bar{g}_{ls}) \\ &= \Gamma^s_{ij,k} - \Gamma^s_{ik,j} + \Gamma^r_{ij}\Gamma^s_{rk} - \Gamma^r_{ik}\Gamma^s_{rj} - (l_{ij}l_{kl} - l_{ik}l_{jl})g^{ls} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Gamma^s_{ij,k} - \Gamma^s_{ik,j} + \Gamma^r_{ij}\Gamma^s_{rk} - \Gamma^r_{ik}\Gamma^s_{rj} = (l_{ij}l_{kl} - l_{ik}l_{jl})g^{ls}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit g_{st} so folgt

$$(\Gamma^s_{ij,k} - \Gamma^s_{ik,j} + \Gamma^r_{ij}\Gamma^s_{rk} - \Gamma^r_{ik}\Gamma^s_{rj})g_{st} = l_{ij}l_{kt} - l_{ik}l_{jt}$$

Betrachtet man nun den speziellen Fall, $i = j = 1$ und $k = t = 2$ so gilt

$$(\Gamma^s_{11,2} - \Gamma^s_{12,1} + \Gamma^r_{11}\Gamma^s_{r2} - \Gamma^r_{12}\Gamma^s_{r1})g_{s2} = det(\mathbf{L}) \tag{3.8-3}$$

Da für die Christoffel-Symbole bereits gezeigt wurde, daß sie innergeometrische Größen sind, lassen sich diese ausschließlich aus der ersten metrischen Fundamentalgröße $\mathbf{G}$ und ihren Ableitungen gewinnen. Demzufolge ist auch $det(\mathbf{L})$ ausschließlich aus $\mathbf{G}$ und ihren Ableitungen bestimmbar und es wird deutlich, daß demnach die Gaußsche Krümmung

$$K = \frac{det(\mathbf{L})}{det(\mathbf{G})}$$

ebenfalls eine innergeometrische Größe ist. Sie kann also allein aus Messungen auf der Fläche ohne Berücksichtigung des umgebenden Raumes bestimmt werden, was die Eigenschaft innergeometrischer Größen ausmacht. ■

Folgerung für die Abwickelbarkeit: Nur solche Flächen können aufeinander abwickelbar sein, für die die Gaußsche Krümmung K für alle entsprechenden Flächenpunkte gleich ist. Insbesondere Flächen mit nur elliptischen Punkten ($K > 0$) sind niemals in die Ebene abwickelbar.

Betrachtung: Neben den Christoffel-Symbolen Γ^k_{ij} und der Gaußschen Krümmung K ist auch die geodätische Krümmung einer Kurve

$$\Gamma = \{\mathbf{y} : \ \mathbf{y}(s) = \mathbf{x}(u^1(s), u^2(s)), \ s \in \mathbf{S}\} \quad (s \text{ sei der natürliche Parameter})$$

in der Fläche

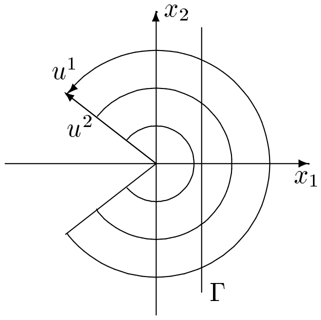
$$F = \{\mathbf{x} : \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2), \ (u^1, u^2) \in \mathbf{I}\}$$

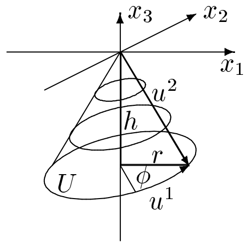
eine innergeometrische Größe, was bereits im Abschnitt 3.6 gezeigt wurde, siehe dazu (3.6-1).

$$k_g = (u^{1\prime}(u^{2\prime\prime} + u^{j\prime}u^{k\prime}\Gamma^2_{jk}) - u^{2\prime}(u^{1\prime\prime} + u^{j\prime}u^{k\prime}\Gamma^1_{jk}))\ \sqrt{det(\mathbf{G})}$$

Da bereits gezeigt wurde, daß die Christoffelsymbole innergeometrische Größen sind, geht somit die geodätische Krümmung ausschließlich aus der ersten metrischen Fundamentalgröße hervor (abgesehen, von den Unabhängigen u^i). Demzufolge ist gezeigt, daß die geodätische Krümmung eine innergeometrische Größe ist. ■

Beispiel: Es soll die Abwicklung eines Kegels in die Ebene sowie das Verhalten geodätischer Linien des Kegels beim Abwickeln betrachtet werden.





Für den Kreissektor in der Ebene, der in den Kegel verbogen werden soll, ergibt sich die Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}_E = \begin{pmatrix} u^2 \cos u^1 \\ u^2 \sin u^1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad \begin{array}{l} u^1 = [-\phi_{max}/2, \phi_{max}/2];\ \phi_{max} = \frac{2\pi}{k};\ (k > 1) \\ u^2 = [0, R] \end{array} .$$

k entspricht dabei dem Bruchteil, der von einer Kreisfläche verwendet wird. Aus dieser Parameterdarstellung des Kreissektors in der Ebene kann man die erste metrische Fundamentalgröße wiefolgt bestimmen.

$$\mathbf{x}_{E,1} = \begin{pmatrix} -u^2 \sin u^1 \\ u^2 \cos u^1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}_{E,2} = \begin{pmatrix} \cos u^1 \\ \sin u^1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} g_{11}^E = (\mathbf{x}_{E,1}, \mathbf{x}_{E,1}) &= \quad (u^2)^2 \sin^2 u^1 + (u^2)^2 \cos^2 u^1 &&= (u^2)^2 \\ g_{22}^E = (\mathbf{x}_{E,2}, \mathbf{x}_{E,2}) &= \quad \cos^2 u^1 + \sin^2 u^1 &&= 1 \\ g_{12}^E = g_{21}^E = (\mathbf{x}_{E,1}, \mathbf{x}_{E,2}) &= \quad -u^2 \sin u^1 \cos u^1 + u^2 \cos u^1 \sin u^1 &&= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G_E = \begin{pmatrix} (u^2)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wird der Kegel durch Zusammenfügen der beiden Schenkel des Kreissektors in dem unteren Teil der x_1-x_3-Achse erzeugt, so ergeben sich aus der obigen Grafik durch Verbiegen die folgende Beziehungen für die Parameter des Kegels.

$$\begin{aligned} \phi &= ku^1 \\ &\quad \text{für den Umfang eines Breitenkreises des Kegels gilt} \\ &\quad U = 2\pi\ r = \phi_{max} u^2 = \frac{2\pi}{k} u^2 \Rightarrow r = \frac{u^2}{k} \\ r &= \frac{u^2}{k} \\ &\quad \text{aus dem Satz von Pythagoras } h^2 + r^2 = (u^2)^2 \text{ folgt} \\ h &= \sqrt{(u^2)^2 - \left(\frac{u^2}{k}\right)^2} = \sqrt{1 - k^{-2}}\ u^2 \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Parameterdarstellung für den Kegel

$$\mathbf{x}_K = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ -h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u^2}{k} \cos(ku^1) \\ \frac{u^2}{k} \sin(ku^1) \\ -\sqrt{1 - k^{-2}}\ u^2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad \begin{array}{l} u^1 = [-\phi_{max}/2, \phi_{max}/2];\ \phi_{max} = \frac{2\pi}{k};\ (k > 1) \\ u^2 = [0, R] \end{array} .$$

Aus dieser Parameterdarstellung des Kegels kann man ebenso die erste metrische Fundamentalgröße wiefolgt bestimmen.

$$\mathbf{x}_{K,1} = \begin{pmatrix} -\frac{u^2}{k} k \sin(ku^1) \\ \frac{u^2}{k} k \cos(ku^1) \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}_{K,2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \cos(ku^1) \\ \frac{1}{k} \sin(ku^1) \\ -\sqrt{1 - k^{-2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
g_{11}^K = (\mathbf{x}_{K,1}, \mathbf{x}_{K,1}) &= \quad (u^2)^2 \sin^2 u^1 + (u^2)^2 \cos^2 u^1 &&= (u^2)^2 \\
g_{22}^K = (\mathbf{x}_{K,2}, \mathbf{x}_{K,2}) &= \quad \tfrac{1}{k^2} \cos^2 u^1 + \tfrac{1}{k^2} \sin^2 u^1 + (1-k^{-2}) &&= 1 \\
g_{12}^K = g_{21}^K = (\mathbf{x}_{K,1}, \mathbf{x}_{K,2}) &= \quad -\tfrac{u^2}{k} \sin u^1 \cos u^1 + \tfrac{u^2}{k} \cos u^1 \sin u^1 + 0 &&= 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow G_K = \begin{pmatrix} (u^2)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demzufolge ist gezeigt, da die erste Fundamentalgröße des Kreissektors und des Kegels übereinstimmen $G_E = G_K$, daß diese Flächen nach Definition 3.8.2 ineinander verbiegbar sind. Demzufolge gibt es nach der Bemerkung 3) auf Seite 88 eine Flächenschar F_α, so daß für den hier vorliegenden Fall$F_{\alpha=1} = F_E$ dem Kreissektor und $F_{\alpha=k} = F_K$ der Kegelfläche entsprechen.
Da die erste Fundamentalgröße G_K jedoch nicht selber von k abhängt, entspricht die Parameterdarstellung des Kegels nach der Substitution von k durch α bereits der Parameterdarstellung dieser Flächenschar F_α, deren erste Fundamentalgrößen alle, unabhängig von α, identisch sind.

$$\mathbf{x}_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{u^2}{\alpha} \cos(\alpha u^1) \\ \frac{u^2}{\alpha} \sin(\alpha u^1) \\ -\sqrt{1-\alpha^{-2}}\ u^2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad \begin{array}{l} u^1 = [-\phi_{max}/2, \phi_{max}/2];\ \phi_{max} = \frac{2\pi}{k};\ (k>1) \\ u^2 = [0, R] \\ \alpha = [1, k] \end{array} \qquad .$$

Nach Bemerkung 2) auf Seite 88 bleibt beim Verbiegen von Flächen die innere Geometrie der Fläche erhalten. Insbesondere gehen demnach geodätische Linien wiederin geodätische Linien über. In der Ebene entsprechen die Geraden den geodätischen Linien. Es soll also untersucht werden, wie sich die Gerade Γ (siehe obige Grafik) bei bem Verbiegen des Kreissektors in den Kegel verhält.
Die Gerade Γ hat die folgende Parameterdarstellung.

$$\mathbf{y}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_E(u^1(t), u^2(t))$$

mit der Darstellung der Parameter $u^1(t) = \varphi$ und $u^2(t) = r$ in Polarkoordinaten

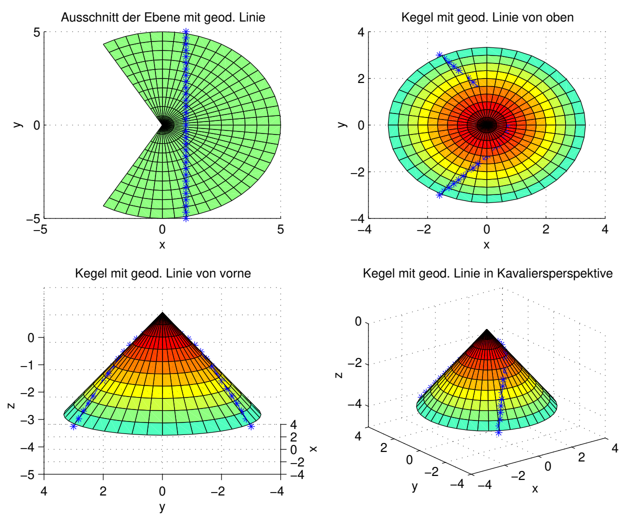
$$u^1(t) = \arctan(1/t) \ \text{ und } \ u^2(t) = \sqrt{1+t^2}.$$

Nach Substituieren dieser Parameter u^i durch $u^i(t)$ in der Parameterdarstellung des Kegels erhält man die geodätische Linie auf dem Kegel, die durch Verbiegen aus der Gerade $\mathbf{y}_E$ auf dem Kreissektor in den Kegel hervor geht.

$$\mathbf{y}_K = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1+t^2}}{k} \cos(k \arctan(1/t)) \\ \frac{\sqrt{1+t^2}}{k} \sin(k \arctan(1/t)) \\ -\sqrt{1-k^{-2}}\ \sqrt{1+t^2} \end{pmatrix} = \mathbf{x}_K(u^1(t), u^2(t))$$

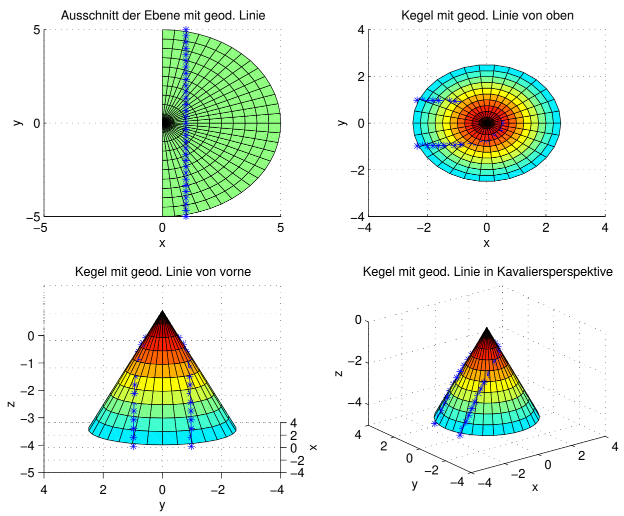
Die folgenden Grafiken sollen für verschieden große Kreissektoren, d.h. für verschiedene k dieses Verbiegen darstellen. Hierbei soll auf die Gestalt der geodätischen Linie auf dem Kegel geachtet werden. Aus der Clairantschen Relation (siehe Satz 3.6.3) geht hervor, daß bei Rotationsflächen mit monoton wachsendem Radius, der der Kegel gerecht wird, die geodätischen Linien sich den Meridianen annährt, d.h. sie nähren sich den Geraden an, die auf der Mantelfläche liegen und durch die Spitze des Kegels verlaufen. Dieser Sachverhalt wird durch die Grafiken untermauert.

Verbiegung eines Kreissektors der zwei Drittel eines Kreises k = 1, 5 entspricht in einen Kegel

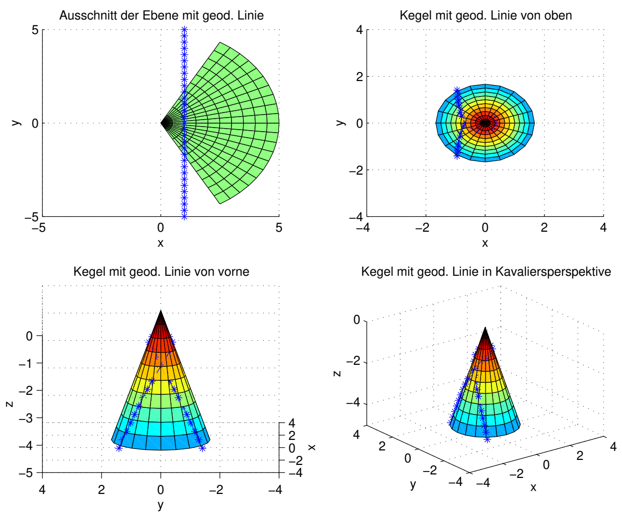


Beim Rotationsparaboloid umrunden die geodätischen Linien das Rotationsparaboloid trotz dieser Annäherung an die Meridiane unendlich oft. Bei dem Kegel ist dies nicht so. Betrachtet man die Grafik für $k = 1,5$ so wird deutlich, daß sich die geodätische Linie nicht selbst schneidet, demzufolge den Kegel gar nicht umrundet. Verkleinert man jedoch die Größe des Kreissektors $k = 2$ so ist aus der Grafik ersichtlich, daß die beiden "Enden" der geodätischen Linien nebeneinander herlaufen. Also sich weder selbst schneiden noch den Kegel umrunden. Bei einer weiteren Verkleinerung des Kreissektors $k = 3$ ist jedoch aus der Grafik zu bemerken, daß die geodätische Linie einmal um den Kegel herumführt und genau an der "Naht" sich selbst schneidet. Sie umrundet also den Kegel. Die Frage die sich hieraus ergibt ist, ob die geodätische Linie in Abhängigkeit von k in der Lage ist den Kegel unendlich oft zu umrunden und ob es einen direkten Zusammenhang dieser Umrundungen zu dem Parameter k gibt, der ein Maß für den Winkel $\phi_{max} = 2\pi/k$ des Kreissektors ist.

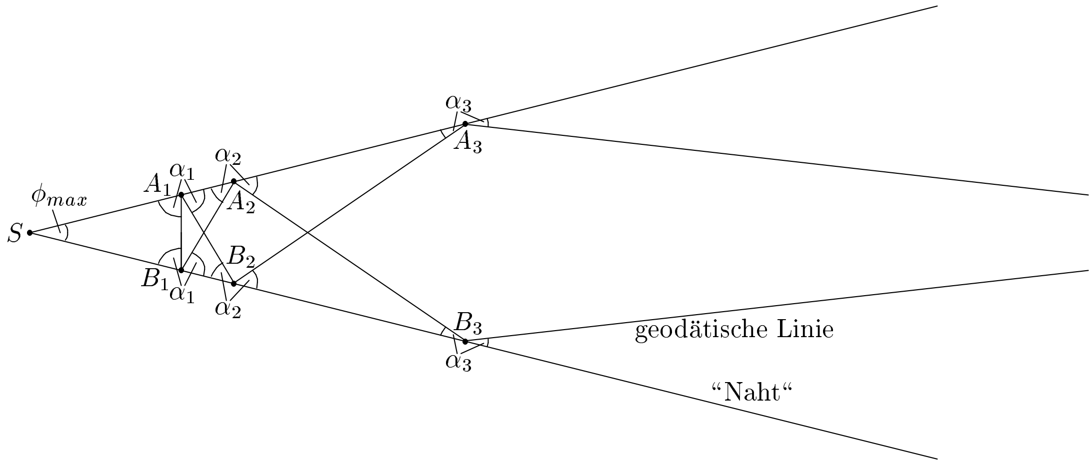
Verbiegung eines Kreissektors der einem halben Kreis k = 2 entspricht in einen Kegel



Verbiegung eines Kreissektors der einem drittel Kreis k = 3 entspricht in einen Kegel



Würde man den Kegel mit samt dieser geodätischen Linie an der "Naht" aufschneiden und in die Ebene abwickeln, so würde dies die Gestalt haben, die in der folgenden Grafik dargestellt ist (vergleiche auch mit der obigen Grafik für k=3).
Es ist darauf hinzuweisen, daß an den Punkten A_i und B_i das eine "Ende" der geodätischen Linie in das andere übergeht. Andererseits sind die Winkel zwischen der "Naht" und der geodätischen Linie an den Punkten A_i und B_i gleich groß und sollen somit einheitlich mit α_i bezeichnet werden. Unter diesen Gesichtspunkten lassen sich die folgenden Überlegungen anstellen.



Aus der Innenwinkelsumme des Dreiecks (S, A_1, B_1) folgt

$$\begin{aligned} \pi &= \phi_{max} + 2\alpha_1 \\ &= \frac{2\pi}{k} + 2\alpha_1, \\ \Rightarrow \alpha_1 &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{k}, \end{aligned}$$

weiterhin folgt aus der Innenwinkelsumme des Dreiecks (S, A_2, B_1)

$$\begin{aligned} \pi &= \phi_{max} + \alpha_2 + (\pi - \alpha_1) \\ &= \frac{2\pi}{k} + \alpha_2 + \left(\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{k}\right)\right), \\ \Rightarrow \alpha_2 &= \frac{\pi}{2} - 3\frac{\pi}{k}. \end{aligned}$$

Man kann nun sukzessiv die Innenwinkelsummen der Dreiecke (S, A_i, B_{i-1}) untersuchen

$$2\pi = \phi_{max} + \alpha_i + (\pi - \alpha_{i-1}).$$

Nach Einsetzen des bereits bekannten Winkels α_{i-1} würde sich die folgende Beziehung ergeben

$$\Rightarrow \alpha_i = \frac{\pi}{2} - (2i - 1)\frac{\pi}{k}.$$

Diese Beziehung gilt jedoch nur für $\alpha_i > 0$. Da die Zahlenfolge α_i einer arithmetischen monoton fallenden Folge entspricht kann man ein i_{max} bestimmen, so daß

$$\alpha_{i_{max}} = \tfrac{\pi}{2} - (2i_{max} - 1)\tfrac{\pi}{k} > 0 \quad \text{und} \quad \alpha_{i_{max}+1} = \tfrac{\pi}{2} - (2(i_{max} + 1) - 1)\tfrac{\pi}{k} \leq 0 \quad \text{gilt.}$$

$$i_{max} = \tfrac{k}{4} + \tfrac{1}{2}$$

Da jeder Schnittpunkt der geodätischen Linie mit sich selbst einer vollständigen Umrundung entspricht, kann man sagen, daß die geodätische Linie den Kegel i_{max} mal umrundet, wenn $\alpha_{i_{max}} > \phi_{max}/2 = \pi/k$, sich die "Enden" der geodätischen Linie also noch schneiden, aber nicht mehr die "Naht" erreichen. Ist der Winkel größer so finden nur $(i_{max} - 1)$ Umrundungen statt, da die "Enden" der geodätischen Linie nach den Punkten $A_{i_{max}}$ bzw. $B_{i_{max}}$ auseinander führen. Aus dieser Erkenntnis kann man zum einen ableiten, wie k gewählt werden kann, um eine gewisse Anzahl Umrundungen zu erreichen, zum anderen, daß man mit geeigneter Wahl von k zwar eine beliebige Umrundungszahl erreichen kann, diese jedoch, anders als beim Rotationsparaboloid, stets endlich bleibt, da i_{max} eine obere Schranke der Umrundungen ist und $i_{max} < \infty\ \forall k$.■

3.9 „Curvatura Integra"-Gesamtkrümmung und der Satz von Gauß und Bonnet

Definition 3.9.1 (Gauß-Abbildung) *Zu der Fläche*

$$F = \{\mathbf{x} : \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2), \ (u^1, u^2) \in \mathbf{I}\} \tag{3.9-1}$$

sei die Fläche $\hat{F}$ *durch*

$$\hat{F} = \{\mathbf{f} : \ \mathbf{f} = \mathbf{f}(u^1, u^2) = \frac{\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}}{|\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}|}, \ (u^1, u^2) \in \mathbf{I}\} \tag{3.9-2}$$

definiert, wobei $\mathbf{f}(u^1, u^2)$ *der Flächennormalenvektor der Fläche* F *im Flächenpunkt* $\mathbf{x}(u^1, u^2)$ *ist. Da die Norm des Flächennormalenvektors Eins ist, ist die Fläche* $\hat{F}$ *sicher eine Teilmenge der Einheitskugel mit dem Mittelpunkt* O*. Die Abbildung*

$$N : \mathbf{I} \to \hat{F} \subset \mathbf{R}^3 \ \mathit{mit} \ (u^1, u^2) \to \mathbf{f}(u^1, u^2)$$

heißt Gauß-Abbildung (oder Normalenabbildung) von $\mathbf{x}$.

Betrachtung: Im weiteren soll der Flächeninhalt $A_{\hat{F}}$ der Fläche $\hat{F}$ untersucht werden.

$$A_{\hat{F}} = \int\limits_{\mathbf{I}} \sqrt{det(\hat{\mathbf{G}}(u^1, u^2))} \ du^1 du^2$$

Es ist demnach notwendig, die erste metrische Fundamentalgröße $\hat{\mathbf{G}}$ der Fläche $\hat{F}$ zu bestimmen. Dazu sei folgendes überlegt.

$$\begin{aligned} \hat{g}_{ij} &= (\mathbf{f}_{,i}, \mathbf{f}_{,j}) \quad \text{nach der Ableitungsgleichung von Weingarten (3.5-5) folgt} \\ &= (l_{im} g^{mk} \mathbf{x}_{,k}, l_{jn} g^{nl} \mathbf{x}_{,l}) = l_{im} g^{mk} l_{jn} g^{nl} \underbrace{(\mathbf{x}_{,k}, \mathbf{x}_{,l})}_{= g_{kl}} = l_{im} l_{jn} \underbrace{g^{mk} \underbrace{g^{nl} g_{kl}}_{= \delta_{nk}}}_{g^{mn}} = l_{im} g^{mn} l_{jn} \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise ergibt sich demnach

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{L}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L}$$

$$\Rightarrow det(\hat{\mathbf{G}}) = det(\mathbf{L}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L}) = \tfrac{det(\mathbf{L})^2}{det(\mathbf{G})}$$

Aus (3.3-5) geht hervor, daß für ein differentiell kleines Flächenstück von $\hat{F}$ gilt

$$dA_{\hat{F}} = \sqrt{det \ \hat{\mathbf{G}}} \ du^1 \ du^2 = \frac{det(\mathbf{L})}{\sqrt{det(\mathbf{G})}} \ du^1 \ du^2 = \frac{det(\mathbf{L})}{det(\mathbf{G})} \sqrt{det(\mathbf{G})} \ du^1 \ du^2.$$

Nach (3.4-9) und (3.3-5) folgt für den Flächeninhalt $A_{\hat{F}}$ der Fläche $\hat{F}$

$$dA_{\hat{F}} = K \ dA_F,$$

$$\Rightarrow \ A_{\hat{F}} = \int\limits_{\hat{F}} dA_{\hat{F}} = \int\limits_{F} K \ dA_F.$$

■

Definition 3.9.2 (Gesamtkrümmung) *Der Flächeninhalt*

$$A_{\hat{F}} = \int\limits_F K \; dA_F$$

der Fläche der Flächennormalenvektoren $\hat{F}$ (3.9-2) einer Fläche F (3.9-1) wird als Gesamtkrümmung der Fläche F (curvatura integra) bezeichnet.

Satz 3.9.1 (Satz von Gauß und Bonnet) *Ist $F = \{\mathbf{x} : \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2), \ (u^1, u^2) \in \mathbf{I}\}$ eine Fläche der Klasse $r \geq 3$, C die Randkurve dieser Fläche, eine geschlossene stückweise dreimal stetig differenzierbare Kurve mit der Bogenlänge $s \in \mathbf{S}$. Diese Randkurve soll bis auf an endlich vielen Stellen $s_1 ... s_n \in \mathbf{S}$ (Ecken) eine wohldefinierte Tangente besitzen. C habe in der Ecke $\mathbf{x}(u^1(s_i), u^2(s_i))$, $i = 1..n$ den links- bzw. rechtsseitigen Tangentenvektor $\mathbf{t}(s_i - 0)$ bzw. $\mathbf{t}(s_i + 0)$ und den Innenwinkel α_i der von den Tangentenvektoren bestimmt wird. $k_g(s)$ sei die geodätische Krümmung (siehe Definition 3.4.1) dieser Randkurve C, K die Gaußsche Krümmung (3.4-7) in dem Flächenpunkt $\mathbf{x}(u^1, u^2)$ und dA_F das Oberflächenelement von F mit $dA_F = \sqrt{det(\mathbf{G})} \; du^1 du^2$, so gilt*

$$\int\limits_C k_g(s) \; ds + \int\limits_F K \; dA_F = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + (2 - n)\pi \tag{3.9-3}$$

(siehe [Wünsch])

Bemerkung: Eine erste Version dieses fundamentalen Satzes wurde von Gauß 1827 für den Spezialfall angegeben, daß F ein geodätisches Dreieck ist, d.h. die Randkurve C wird durch drei Ecken und drei geodätischen Linien als Kurvenstücke begrenzt. Demzufolge ist die geodätische Krümmung auf dem Rand Null $k_g = 0$ und $n = 3$. Es gilt demnach

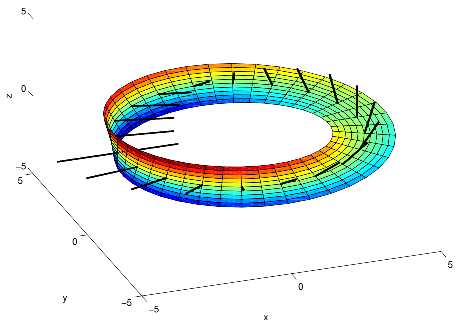
$$\int\limits_F K \; dA_F = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i - \pi \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{3} \alpha_i = \int\limits_F K \; dA_F + \pi .$$

Für den Fall, das die betrachtete Fläche eine Ebene ist ergibt sich ein geradliniges Dreieck in dem die Gaußsche Krümmung ebenfalls identisch Null ist $K = 0$. Demnach muß die Innenwinkelsumme (von Dreiecken), wie bekannt, π sein.

Satz 3.9.2 (Innenwinkelsumme gekrümmter geodätischer Dreiecke) *Auf einem elliptisch gekrümmten Flächenstück ($K > 0$), z.B. der Kugel, ist die Innenwinkelsumme jedes geodätischen Dreieckes größer als π, auf einem hyperbolisch gekrümmten ($K < 0$), z.B. dem hyperbolischen Paraboloid, ist sie kleiner als π. Auf einem in die Ebene abwickelbaren Flächenstück, z.B. Zylinder und Kegel, ist die Innenwinkelsumme stets gleich π. [Wünsch]*

Definition 3.9.3 (orientierbar) *Eine Fläche F heißt orientierbar, wenn ihre Gauß-Abbildung (Normalenabbildung) auf die Einheitssphäre eindeutig ist. D.h. der Flächennormalenvektor wird in eindeutiger Weise (bzgl. seiner Richtung) bestimmt. [Wünsch]*

Beispiel: Möbius-Band Diese Fläche entsteht durch Kreisen eines Geradenstückes bei gleichzeitiger Drehung des Geradenstückes um die jeweils aktuelle Tangentiale des Kreises.



$$\mathbf{x} = r \begin{pmatrix} \cos(u^1) \\ \sin(u^1) \\ 0 \end{pmatrix} + lu^2 \begin{pmatrix} \cos(u^1/2)\cos(u^1) \\ \cos(u^1/2)\sin(u^1) \\ \sin(u^1/2) \end{pmatrix},$$

$$u^1 \in [0, 2\pi), u^2 \in [-m, m]$$

Aus der Grafik ist ersichtlich, daß das Möbius-Band nicht orientierbar, d.h. in diesem Fall kann man keine Flächenseite auszeichnen, jedoch eine Regelfläche ist. Die Kugel jedoch ist orientierbar, $\mathbf{f}$ kann entweder überall nach außen oder nach innen zeigen. ■

Definition 3.9.4 (homöomorph) *Zwei Flächen F und $\bar{F}$ heißen homöomorph, wenn es eine eineindeutige und umkehrbare stetige Abbildung von F auf $\bar{F}$ gibt.*

Bemerkung: Die Fläche $\bar{F}$ geht dann aus F durch eine stetige Deformation hervor. Jedes Ellipsoid ist beispielsweise homöomorph zur Kugel.

Definition 3.9.5 (kompakt, geschlossen) *Eine Fläche F heißt kompakt, wenn ihre Punktmenge im $\mathbf{R}^3$ abgeschlossen und beschränkt ist. Eine zusammenhängende kompakte Fläche, deren Rand leer ist, nennt man geschlossen.*

Beispiel: Das Ellipsoid, die Kugel und der Torus sind z.B. kompakt und geschlossen. Die Ebene und der Zylinder sind nicht kompakt, da sie nicht beschränkt sind. Auch zwei nicht zusammenhängende Halbkugeln sind kompakt, ihre Ränder sind Großkreise. ■

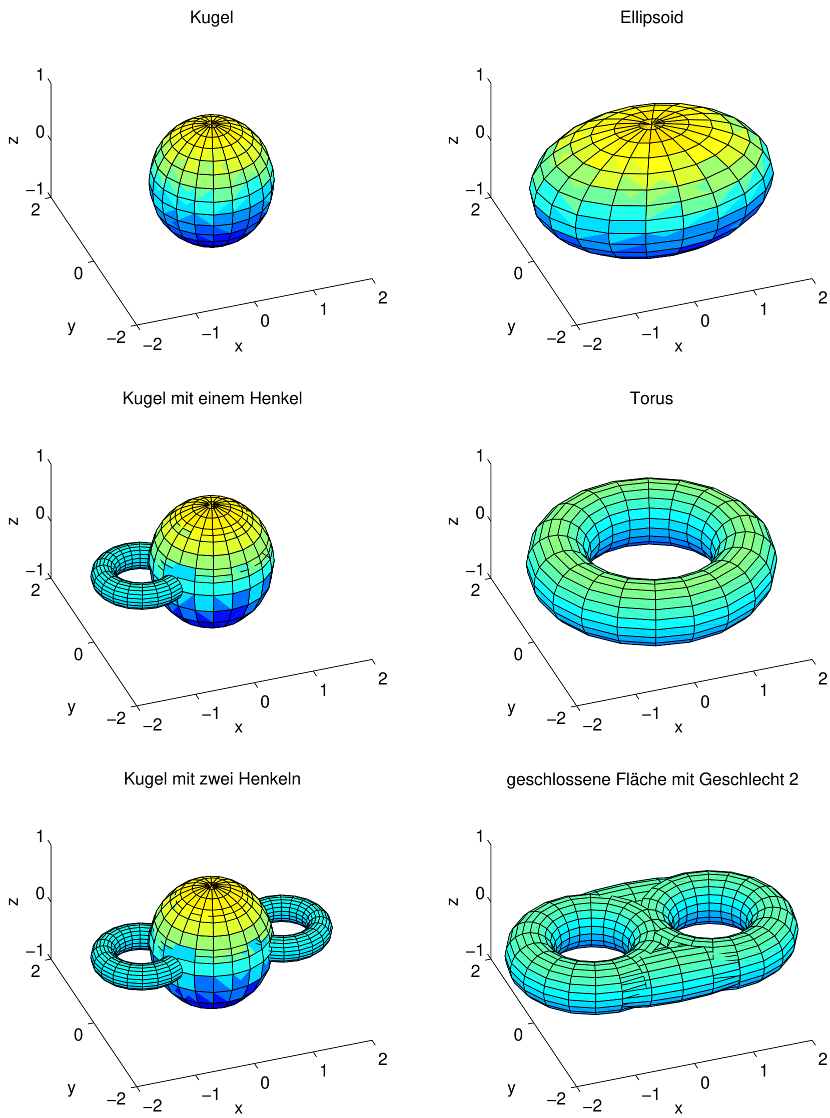
Folgerung aus dem Satz von Gauß und Bonnet
Die Fläche F sei vom „Sphärentyp", d.h. geschlossen und homöomorph zur Sphäre (Kugel). Durch eine geschlossene Kurve Γ werde F in zwei Teilflächen F_+ und F_- zerlegt. Dann folgt aus (3.9-3) für $n = 0$, da die Kurve Γ keine Ecken besitzt,

$$\int\limits_{F_+} K \; dA_F + \int\limits_{\Gamma} k_g(s) \; ds = 2\pi, \qquad \int\limits_{F_-} K \; dA_F - \int\limits_{\Gamma} k_g(s) \; ds = 2\pi.$$

Das Minuszeichen in der zweiten Gleichung resultiert aus der Forderung nach jeweils positiver Orientierung von K. Durch Addition beider Gleichungen folgt für die Gesamtkrümmung

$$\int_F K \; dA_F = 4\pi. \qquad (3.9\text{-}4)$$

Für jede Fläche vom Sphärentyp ist demnach die Gesamtkrümmung konstant. Eine nirgends positiv gekrümmte geschlossene Fläche kann also nicht homöomorph zur Kugel (Sphäre) sein. Die Formel (3.9-4) kann jedoch für allgemeinere geschlossene Flächen verallgemeinert werden.
Ein wichtiges Resultat der Topologie von Flächen besagt, daß jede geschlossene, orientierbare Fläche F homöomorph zu einer Kugel mit $p \in \mathbf{N}$ aufgesetzten Henkeln ist. Die Zahl p heißt nach Riemann das Geschlecht von F und entspricht im wesentlichen der Anzahl der Löcher. Die Kugel hat also das Geschlecht 0, der Torus hat das Geschlecht 1. Es zeigt sich, daß die Gesamtkrümmung einer solchen Fläche nur vom Geschlecht abhängt. (siehe [Wünsch]) ■



Lemma 3.9.1 (Gesamtkrümmung geschlossener Flächen) *Jede geschlossene orientierbare Fläche F_p vom Geschlecht p hat die Gesamtkrümmung*

$$\int_F K \; dA_F = 4\pi(1-p).$$

Bemerkung: Demnach ist die Gesamtkrümmung des Torus ($p = 1$) Null.

Beispiel: Kugel

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r\cos(u^1)\cos(u^2) \\ r\sin(u^1)\cos(u^2) \\ r\sin(u^2) \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} u^1 \in [0, 2\pi) \\ u^2 \in (-\pi/2, \pi/2) \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} r^2\cos^2(u^2) & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \; \mathbf{L} = \frac{1}{det(\mathbf{G})}\begin{pmatrix} -r^3\cos^3(u^2) & 0 \\ 0 & -r^3\cos(u^2) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad K = \frac{det(\mathbf{L})}{det(\mathbf{G})} = \frac{r^6\cos^4(u^2)}{r^8\cos^4(u^2)} = \frac{1}{r^2}$$

$$\Rightarrow \qquad K\ dA_F = K\ \sqrt{det(\mathbf{G})}\ du^1 du^2 = \cos(u^2)\ du^1 du^2$$

$$\Rightarrow \qquad \int_F K\ dA_F = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u^2)\ du^1 du^2 = 2\pi(\sin(u^2)\big|_{-\pi/2}^{\pi/2}) = 4\pi$$

$$\Rightarrow \qquad \text{Geschlecht: } p = 0$$

Die Kugel hat somit das Geschlecht 0. ■

Beispiel: Torus

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} (R + r\cos(u^2))\cos(u^1) \\ (R + r\cos(u^2))\sin(u^1) \\ r\sin(u^2) \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} u^1 \in [0, 2\pi) \\ u^2 \in [0, 2\pi) \\ R > r \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} (R + r\cos(u^2))^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{L} = \begin{pmatrix} -(R + r\cos(u^2))\cos(u^2) & 0 \\ 0 & -r) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad K = \frac{det(\mathbf{L})}{det(\mathbf{G})} = \frac{(R+r\cos(u^2))\cos(u^2)r}{(R+r\cos(u^2))^2 r^2} = \frac{cos(u^2)}{(R+r\cos(u^2))r}$$

$$\Rightarrow \qquad dA_F = \sqrt{det(\mathbf{G})}\ du^1 du^2 = (R + r\cos(u^2))r\ du^1 du^2$$

$$\Rightarrow \qquad \int_F K\ dA_F = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(u^2)\ du^1 du^2 = 2\pi(\sin(u^2)\big|_0^{2\pi}) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \text{Geschlecht: } p = 1$$

Der Torus hat somit das Geschlecht 1. ■

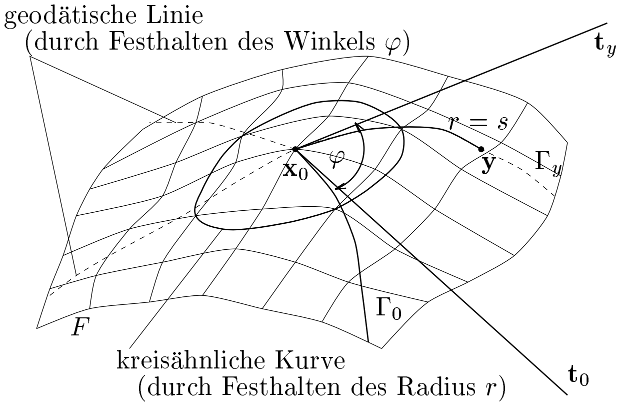
3.10 Besondere Parametrisierungen

3.10.1 Geodätische Polarkoordinaten

Auf einer Fläche F zeichnen wir einen festen Punkt $\mathbf{x}_0 \in F$ besonders aus. Wie wir bereits in Abschnitt 3.6.1 gesehen haben verläuft durch den Punkt $\mathbf{x}_0$ in jede Richtung eine geodätische Linie. Wir zeichnen ebenfalls eine dieser geodätischen Linien besonders aus, und nennen diese Γ_0. Es ist darauf zu achten, daß die hier betrachteten geodätischen Linien, wie herkömmliche Strahlen, ihren Ursprung in dem Punkt $\mathbf{x}_0$ haben sollen und von hier ins Unendliche führen.
Zu jedem Punkt $\mathbf{y} \in F$ kann man nun eine geodätische Linie Γ_y finden, die diesen Punkt mit dem bereits ausgezeichneten Punkt $\mathbf{x}_0$ verbindet. Dies ist verwand mit dem Problem des Findens einer kürzesten Verbindung zweier Flächenpunkte, siehe dazu auf Seite 77. Definiert man nun den Winkel φ als den Winkel zwischen den geodätischen Linien Γ_0 und Γ_y, der dem Winkel zwischen den Tangenten $\mathbf{t}_0$ und $\mathbf{t}_y$ der beiden geodätischen Linien im Punkt $\mathbf{x}_0$ entspricht, und den Abstand r beider Punkte als die Bogenlänge der geodätischen Linie Γ_y zwischen $\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{y}$, so kann man diese beiden Größen als geodätische Polarkoordinaten (r, φ) bezeichnen. Durch den ausgezeichneten Punkt $\mathbf{x}_0$ und die ausgezeichnete geodätische Linie Γ_0 wird somit das geodätische Polarkoordinatensystem definiert mit der die Fläche F in der Umgebung von $\mathbf{x}_0$ als

$$F = \{\mathbf{x} :\ \mathbf{x} = \mathbf{x}(r, \varphi),\ (r, \varphi) \in \mathbf{I}\}$$

parametrisiert wird. Es wird deutlich, daß, analog zum herkömmlichen Polarkoordinatensystem, der ausgezeichnete Punkt selbst ein singulärer Punkt ist, da der Winkel φ frei gewählt werden kann, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \varphi)$.



Folgerungen: 1) Entspricht die Fläche F gerade einer Ebene, so ist das geodätische Polarkoordinatensystem identisch dem herkömmlichen Polarkoordinatensystem, da die geodätischen Linien durch den Koordinatenursprung $\mathbf{x}_0$ in einer Ebene gerade den Geraden durch den Punkt $\mathbf{x}_0$ in dieser Ebene entsprechen.
2) Kurven, die durch Festhalten des Winkels $\varphi = \text{const}$ erzeugt werden,

$$\Gamma = \{\mathbf{x} : \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(r, c), \ r \in \mathbf{I}\},$$

entsprechen den geodätischen Linien durch den Punkt $\mathbf{x}_0$. Kurven, die hingegen durch Festhalten des Radius r entstehen,

$$\Gamma = \{\mathbf{x} : \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(c, \varphi), \ \varphi \in [0, 2\pi)\},$$

sind kreisähnliche Kurven.
3) Die geodätische Polarkoordinatendarstellung ist im allgemeinen global nicht eindeutig. Z.B. haben wir bei dem Zylinder, siehe Seite 76, gesehen, daß zwei verschiedene, nicht auf einem Meridian oder Breitenkreis liegende Flächenpunkte $\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{y}$ durch unendlich viele geodätische Linien, in diesem Fall sind dies Schraubenlinien, verbunden werden können. Zu jeder dieser geodätischen Linie kann man natürlich auch die Bogenlänge bestimmen und somit unendlich viele von einander verschiedene geodätische Polarkoordinatenparameter finden, die diesen einen Flächenpunkt $\mathbf{y}$ definieren. Jedoch lokal gesehen kann man eine genügend kleine Umgebung von $\mathbf{x}_0$ finden, so daß sich geodätische Linien in dieser Umgebung nicht mehrfach schneiden. Somit ist die geodätische Polarkoordinatendarstellung in dieser Umgebung eindeutig und eine zulässige Parametrisierung.
4) Koordinatenlinien bei der geodätischen Polarkoordinatenparametrisierung schneiden sich senkrecht, d.h. $\mathbf{x}_{,1} \perp \mathbf{x}_{,2}$. Demnach ist diese Parametrisierung eine spezielle Gaußsche Parametrisierung. Daraus folgt, daß die erste metrische Fundamentalgröße $\mathbf{G}$ von diagonaler Gestalt ist, da für die Nebendiagonalelemente $g_{12} = g_{21} = (\mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,2}) = 0$ gilt, vgl. Definition 3.3.1.
5) Die Berechnung der Bogenlängen s_r und s_φ der Koordinatenlinien bzgl. des Parameters r und φ aus der ersten metrischen Fundamentalgröße wurde in dem Beispiel auf Seite 86 bereits hergeleitet und es ergab sich

$$ds_r = \sqrt{g_{11}}\, dr \quad \text{und} \quad ds_\varphi = \sqrt{g_{22}}\, d\varphi.$$

Da jedoch der Parameter r gerade der Bogenlänge s_r entsprechen sollte, folgt $r = s_r$ und somit gilt $g_{11} = 1$. Demnach hat die erste metrische Fundamentalgröße einer Fläche bzgl. der geodätischen Parametrisierung die Form

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}. \tag{3.10-1}$$

Daraus folgt, daß alle innergeometrischen Größen nur von der einen Funktion $g_{22}(r, \varphi)$ abhängen.

Betrachtung der Gaußschen Krümmung: Da nun gezeigt wurde, daß alle innergeometrischen Größen nur von dieser einen Funktion $g_{22}(r, \varphi)$ abhängen, ist es sicher interessant, die expliziete Gestalt der Gaußschen Krümmung zu bestimmen. Die Gaußsche Krümmung kann nach Lemma 3.4.4 durch

$$K = \frac{\det \mathbf{L}}{\det \mathbf{G}}$$

bestimmt werden. Hieraus lassen sich folgende Überlegungen ableiten.

$$\begin{aligned}
K &= \frac{\det \mathbf{L}}{\det \mathbf{G}} \\
&\quad \text{mit (3.8-3) und (3.10-1) folgt} \\
&= \frac{(\Gamma^s_{11,2} - \Gamma^s_{12,1} + \Gamma^r_{11}\Gamma^s_{r2} - \Gamma^r_{12}\Gamma^s_{r1})g_{s2}}{g_{22}} \\
&\quad \text{da } g_{12} = 0 \text{ ist, entfällt der Summand für } s = 1 \\
&= \frac{(\Gamma^2_{11,2} - \Gamma^2_{12,1} + \Gamma^r_{11}\Gamma^2_{r2} - \Gamma^r_{12}\Gamma^2_{r1})g_{22}}{g_{22}} \\
&= \Gamma^2_{11,2} - \Gamma^2_{12,1} + \Gamma^r_{11}\Gamma^2_{r2} - \Gamma^r_{12}\Gamma^2_{r1} \\
&= \Gamma^2_{11,2} - \Gamma^2_{12,1} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21}
\end{aligned}$$

Mit den Erkenntnissen der Gleichung (3.8-1) lassen sich die Christoffelsymbole durch

$$\Gamma^n_{ij} = \frac{1}{2}g^{nm}\underbrace{(g_{mi,j} + g_{jm,i} - g_{ij,m})}_{2(\mathbf{x}_{,m},\mathbf{x}_{,ij})}$$

bestimmen. Für die einzelnen Christoffelsymbole folgt demnach unter Berücksichtigung der Diagonalgestalt der ersten metrischen Fundamentalgröße (3.10-1)

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}g^{1m}(g_{m1,1} + g_{1m,1} - g_{11,m}) = \frac{1}{2}g^{11}(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}) = 0, \\
\Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2}g^{2m}(g_{m1,1} + g_{1m,1} - g_{11,m}) = \frac{1}{2}g^{22}(g_{21,1} + g_{12,1} - g_{11,2}) = 0, \\
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}g^{1m}(g_{m2,2} + g_{2m,2} - g_{22,m}) = \frac{1}{2}g^{11}(g_{12,2} + g_{21,2} - g_{22,1}) = -\frac{1}{2}g_{22,1}, \\
\Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2}g^{2m}(g_{m2,2} + g_{2m,2} - g_{22,m}) = \frac{1}{2}g^{22}(g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2}) = \frac{1}{2}g^{22}g_{22,2} = \frac{g_{22,2}}{2g_{22}}, \\
\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2}g^{2m}(g_{m1,2} + g_{2m,1} - g_{12,m}) = \frac{1}{2}g^{22}(g_{21,2} + g_{22,1} - g_{12,2}) = \frac{g_{22,1}}{2g_{22}}, \\
\Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2}g^{1m}(g_{m1,2} + g_{2m,1} - g_{12,m}) = \frac{1}{2}g^{11}(g_{11,2} + g_{21,1} - g_{12,1}) = 0.
\end{aligned}$$

Für die Gaußsche Krümmung folgt somit

$$\begin{aligned}
K &= \Gamma^2_{11,2} - \Gamma^2_{12,1} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21} \\
&= 0 - \left(\frac{g_{22,1}}{2g_{22}}\right)_{,1} + 0 + 0 - 0 - \left(\frac{g_{22,1}}{2g_{22}}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{2}\frac{g_{22,11}g_{22} - g_{22,1}g_{22,1}}{g_{22}^2} - \frac{1}{4}\frac{g_{22,1}^2}{g_{22}^2} \\
&= \frac{1}{4}\frac{-2g_{22,11}g_{22} + g_{22,1}^2}{g_{22}^2}.
\end{aligned}$$

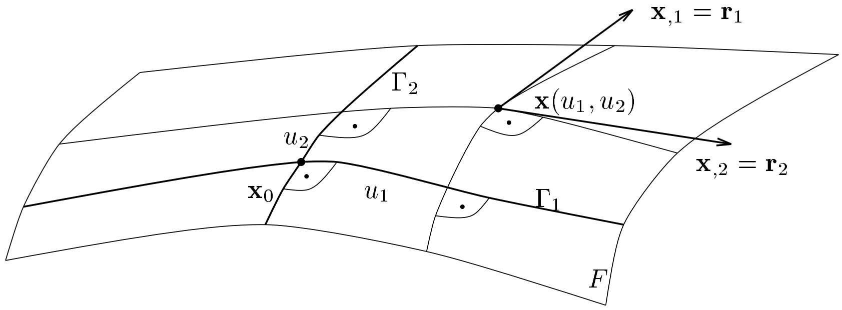
Da der erste Parameter der geodätischen Polarkoordinatenparametrisierung die Bogenlänge r ist, bestimmt sich die Gaußsche Krümmung einer Fläche F bei Nutzung der geodätischen Polarkoordinaten durch

$$K = \frac{1}{2g_{22}}\left(\frac{1}{2g_{22}}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial r}\right)^2 - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial r^2}\right).$$

3.10.2 Paramterisierung durch Krümmungslinien

In diesem Abschnitt wollen wir eine Parametrisierung von Flächen suchen und untersuchen, die ähnlich der natürlichen Parametrisierung von Kurven durch die Bogenlänge dieser Kurve ist.

Definition 3.10.1 (Krümmungslinie) *Eine Krümmungslinie ist eine Kurve Γ in einer Fläche F, deren Tangentialvektor (oder Tangentenvektor) $\mathbf{t}$ mit einer Hauptkrümmungsrichtung $\mathbf{r}_i,\ i=1,2$ der Fläche in jedem Punkt der Kurve übereinstimmt.*



Durch jeden Punkt $\mathbf{x}(u_1,u_2)$ der Fläche, der kein Nabelpunkt ist, gehen zwei solche Krümmungslinien, die sich dort senkrecht schneiden. Wir betrachten nun eine Parametrisierung, für die die Koordinatenlinien gerade diese Krümmungslinien sind, d.h.

$$\mathbf{x}_{,1}=\mathbf{r}_1 \text{ und } \mathbf{x}_{,2}=\mathbf{r}_2.$$

Für die Hauptkrümmungsrichtungen $\mathbf{r}_i,\ i=1,2$ gilt nach Lemma 3.4.3

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= \mathbf{X}'\underline{v}_1=(\mathbf{x}_{,1},\mathbf{x}_2)\underline{v}_1=\mathbf{x}_{,1}\underline{v}_1^1+\mathbf{x}_2\underline{v}_1^2 \stackrel{!}{=} \mathbf{x}_{,1} \quad &\Rightarrow\ \underline{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\
\mathbf{r}_2 &= \mathbf{X}'\underline{v}_2=(\mathbf{x}_{,1},\mathbf{x}_2)\underline{v}_2=\mathbf{x}_{,1}\underline{v}_2^1+\mathbf{x}_2\underline{v}_2^2 \stackrel{!}{=} \mathbf{x}_{,2} \quad &\Rightarrow\ \underline{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Da die Krümmungslinien und somit die Koordinatenlinien in jedem Punkt senkrecht auf einander stehen ist auch diese Parametrisierung eine Gaußche Parametrisierung und somit ist das begleitende Dreibein ein orthogonales Dreiben und weiterhin die erste metrische Fundamentalgröße von diagonaler Gestalt. Aus dem Eigenwertproblem bei der Bestimmung der Hauptkrümmungen, vgl. Lemma 3.4.3, folgt

$$\mathbf{L}\underline{v}_i=\lambda_i\mathbf{G}\underline{v}_i,\ i=1,2$$
$$\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}l_{11}&l_{12}\\l_{21}&l_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}g_{11}&0\\0&g_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}l_{11}&l_{12}\\l_{21}&l_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\lambda_2\begin{pmatrix}g_{11}&0\\0&g_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Somit hat auch die zweite metrische Fundamentalgröße Diagonalgestalt und es gilt

$$l_{ii}=\lambda_i g_{ii},\ i=1,2.$$

Die Fläche F läßt sich somit vollständig durch die vier Funktionen $g_{11}(u_1,u_2), g_{22}(u_1,u_2), \lambda_1(u_1,u_2)$ und $\lambda_2(u_1,u_2)$ charakterisieren.
Wir verwenden die vier Funktionen

$$\begin{array}{rcll}
A_i(u_1,u_2)=|\mathbf{x}_{,i}(u_1,u_2)| & \Rightarrow & g_{ii}=A_i^2 & \text{1. metr. Fundamentalgröße}\\
 & \text{und} & & \\
\lambda_i(u_1,u_2) & \Rightarrow & l_{ii}=\lambda_i A_i^2 & \text{2. metr. Fundamentalgröße (!!! keine Summation über } i \text{ !!!)},
\end{array}$$

$i=1,2$, zur allgemeinen Beschreibung der Fläche F und definieren ein Flächenorthonormalsystem durch

$$(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3)=(\frac{1}{A_1}\mathbf{x}_{,1},\frac{1}{A_2}\mathbf{x}_{,2},\mathbf{f}) \text{ mit } \mathbf{f}=\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2.$$

Im folgenden wollen wir uns einigen charakteristischen Größen einer Fläche zuwenden und herausarbeiten, wie sie sich unter den bisherigen Erkenntnissen entwickeln.

Christoffelsymbole: Unter der Berücksichtigung der diagonalen Gestalt der ersten metrischen Fundamentalgröße und der Berechnungsvorschrift (3.8-1) folgt mit

$$g_{ii} = A_i^2 \text{ und } \frac{\partial}{\partial u^i}(g_{jj}) = 2A_j A_{j,i}$$

für die Christoffelsymbole

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{1m}(g_{m1,1} + g_{1m,1} - g_{11,m}) = \frac{1}{2}g^{11}(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}) = \frac{1}{2}\frac{g_{11,1}}{g_{11}} = \frac{2A_1A_{1,1}}{2A_1^2} = \frac{A_{1,1}}{A_1}, \\
\Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2}g^{2m}(g_{m1,1} + g_{1m,1} - g_{11,m}) = \frac{1}{2}g^{22}(g_{21,1} + g_{12,1} - g_{11,2}) = -\frac{1}{2}\frac{g_{11,2}}{g_{22}} = -\frac{A_1A_{1,2}}{A_2^2}, \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{1m}(g_{m2,2} + g_{2m,2} - g_{22,m}) = \frac{1}{2}g^{11}(g_{12,2} + g_{21,2} - g_{22,1}) = -\frac{1}{2}\frac{g_{22,1}}{g_{11}} = -\frac{A_2A_{2,1}}{A_1^2}, \\
\Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2}g^{2m}(g_{m2,2} + g_{2m,2} - g_{22,m}) = \frac{1}{2}g^{22}(g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2}) = \frac{1}{2}\frac{g_{22,2}}{g_{22}} = \frac{2A_2A_{2,2}}{2A_2^2} = \frac{A_{2,2}}{A_2}, \\
\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}g^{2m}(g_{m1,2} + g_{2m,1} - g_{12,m}) = \frac{1}{2}g^{22}(g_{21,2} + g_{22,1} - g_{12,2}) = \frac{1}{2}\frac{g_{22,1}}{g_{22}} = \frac{A_{2,1}}{A_2}, \\
\Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2}g^{1m}(g_{m1,2} + g_{2m,1} - g_{12,m}) = \frac{1}{2}g^{11}(g_{11,2} + g_{21,1} - g_{12,1}) = \frac{1}{2}\frac{g_{11,2}}{g_{11}} = \frac{A_{1,2}}{A_1}.
\end{aligned}$$

Ableitungsgleichungen von Gauß: Die Ableitungsgleichungen von Gauß $\mathbf{x}_{,ij} = \Gamma_{ij}^k\mathbf{x}_{,k} + l_{ij}\mathbf{f},\ i,j = 1,2$, nehmen unter obigen Voraussetzungen die folgenden Formen an.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{,11} &= \Gamma_{11}^1\mathbf{x}_{,1} + \Gamma_{11}^2\mathbf{x}_{,2} + l_{11}\mathbf{f} = \tfrac{A_{1,1}}{A_1}\mathbf{x}_{,1} - \tfrac{A_1A_{1,2}}{A_2^2}\mathbf{x}_{,2} + \lambda_1A_1^2\mathbf{f} &&= A_{1,1}\mathbf{b}_1 - \frac{A_1}{A_2}A_{1,2}\mathbf{b}_2 + \lambda_1A_1^2\mathbf{f} \\
\mathbf{x}_{,22} &= \Gamma_{22}^1\mathbf{x}_{,1} + \Gamma_{22}^2\mathbf{x}_{,2} + l_{22}\mathbf{f} = -\tfrac{A_2A_{2,1}}{A_1^2}\mathbf{x}_{,1} + \tfrac{A_{2,2}}{A_2}\mathbf{x}_{,2} + \lambda_2A_2^2\mathbf{f} &&= -\frac{A_2}{A_1}A_{2,1}\mathbf{b}_1 + A_{2,2}\mathbf{b}_2 + \lambda_2A_2^2\mathbf{f} \\
\mathbf{x}_{,12} &= \Gamma_{12}^1\mathbf{x}_{,1} + \Gamma_{12}^2\mathbf{x}_{,2} + l_{12}\mathbf{f} = \tfrac{A_{1,2}}{A_1}\mathbf{x}_{,1} + \tfrac{A_{2,1}}{A_2}\mathbf{x}_{,2} &&= A_{1,2}\mathbf{b}_1 + A_{2,1}\mathbf{b}_2
\end{aligned}$$

Ableitung des Flächenorthonormalsystems: Anstelle der zweiten Ableitungen $\mathbf{x}_{,ij}$ der Parameterdarstellung der Fläche, die die Ableitung des begleitenden Dreibeins charakterisieren, wollen wir noch die Ableitung des Flächenorthonormalsystems untersuchen.

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_{1,1} &= \frac{\partial}{\partial u^1}\mathbf{b}_1 = \frac{\partial}{\partial u^1}\frac{1}{A_1}\mathbf{x}_{,1} = \frac{1}{A_1}\mathbf{x}_{,11} - \frac{A_{1,1}}{A_1^2}\mathbf{x}_{,1} = \frac{1}{A_1}\mathbf{x}_{,11} - \frac{A_{1,1}}{A_1}\mathbf{b}_1 \\
&= \frac{A_{1,1}}{A_1}\mathbf{b}_1 - \frac{1}{A_2}A_{1,2}\mathbf{b}_2 + \lambda_1A_1\mathbf{f} - \frac{A_{1,1}}{A_1}\mathbf{b}_1 \\
&= -\frac{A_{1,2}}{A_2}\mathbf{b}_2 + \lambda_1A_1\mathbf{f} \\
\mathbf{b}_{1,2} &= \frac{\partial}{\partial u^2}\mathbf{b}_1 = \frac{\partial}{\partial u^2}\frac{1}{A_1}\mathbf{x}_{,1} = \frac{1}{A_1}\mathbf{x}_{,12} - \frac{A_{1,2}}{A_1^2}\mathbf{x}_{,1} = \frac{1}{A_1}\mathbf{x}_{,12} - \frac{A_{1,2}}{A_1}\mathbf{b}_1 \\
&= \frac{1}{A_1}A_{1,2}\mathbf{b}_1 + \frac{1}{A_1}A_{2,1}\mathbf{b}_2 - \frac{A_{1,2}}{A_1}\mathbf{b}_1 \\
&= \frac{A_{2,1}}{A_1}\mathbf{b}_2 \\
\mathbf{b}_{2,2} &= \frac{\partial}{\partial u^2}\mathbf{b}_2 = \frac{\partial}{\partial u^2}\frac{1}{A_2}\mathbf{x}_{,2} = \frac{1}{A_2}\mathbf{x}_{,22} - \frac{A_{2,2}}{A_2^2}\mathbf{x}_{,2} = \frac{1}{A_2}\mathbf{x}_{,22} - \frac{A_{2,2}}{A_2}\mathbf{b}_2 \\
&= -\frac{1}{A_1}A_{2,1}\mathbf{b}_1 + \frac{A_{2,2}}{A_2}\mathbf{b}_2 + \lambda_2A_2\mathbf{f} - \frac{A_{2,2}}{A_2}\mathbf{b}_2 \\
&= -\frac{A_{2,1}}{A_1}\mathbf{b}_1 + \lambda_2A_2\mathbf{f} \\
\mathbf{b}_{2,1} &= \frac{\partial}{\partial u^1}\mathbf{b}_2 = \frac{\partial}{\partial u^1}\frac{1}{A_2}\mathbf{x}_{,2} = \frac{1}{A_2}\mathbf{x}_{,21} - \frac{A_{2,1}}{A_2^2}\mathbf{x}_{,2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{A_2}A_{1,2}\mathbf{b}_1 + \frac{1}{A_2}A_{2,1}\mathbf{b}_2 - \frac{A_{2,1}}{A_2}\mathbf{b}_2 \\
&= \frac{A_{1,2}}{A_2}\mathbf{b}_1
\end{aligned}
$$

mit Hilfe der Ableitungsgleichungen von Weingarten, siehe Definition 3.5.3, folgt

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b}_{3,1} &= \mathbf{f}_{,1} = -l_{1j}g^{jk}\mathbf{x}_{,k} = -l_{11}g^{11}\mathbf{x}_{,1} = -\frac{l_{11}}{g_{11}}\mathbf{x}_{,1} = -\lambda_1\mathbf{x}_{,1} = -\lambda_1 A_1\mathbf{b}_1 \\
\mathbf{b}_{3,2} &= \mathbf{f}_{,2} = -l_{2j}g^{jk}\mathbf{x}_{,k} = -l_{22}g^{22}\mathbf{x}_{,2} = -\frac{l_{22}}{g_{22}}\mathbf{x}_{,2} = -\lambda_2\mathbf{x}_{,2} = -\lambda_2 A_2\mathbf{b}_2
\end{aligned}
$$

Betrachtung: Wir haben bisher Flächen durch drei Funktionen, jeweils die drei Komponenten der Parameterdarstellung, eindeutig definiert. Nun haben wir festgestellt, daß alle innergeometrischen Größen einer Fläche in der Parametrisierung durch Krümmungslinien durch die vier Funktionen $A_i(u_1, u_2)$, $\lambda_i(u_1, u_2)$ für $i = 1, 2$ beschrieben werden können. Demzufolge ist es naheliegend, daß diese vier Funktionen nicht unabhängig voneinander wählbar sind. In der Tat läßt sich zeigen, daß man bei der Wahl dieser Funktionen Rücksicht auf die Gleichungen von Gauß und auf die Gleichungen von Mainardi/Codazzi, siehe Lemma 3.8.1, nehmen muß. D.h. zu vier beliebigen Funktionen $A_i(u_1, u_2)$, $\lambda_i(u_1, u_2)$ mit $i = 1, 2$, die die Gleichungen von Gauß und Mainardi/Codazzi erfüllen läßt sich eine Fläche finden, für die diese Funktionen die erste und zweite metrische Fundamentalgröße bestimmen.
Die Gleichungen von Gauß und Mainardi/Codazzi nehmen bei der hier gewählten Parametrisierung eine besonders einfache Form an. Z.B. folgt für die Gleichungen von Mainardi/Codazzi

$$
\begin{aligned}
0 \overset{!}{=} C_{ijk} &= l_{ij,k} - l_{ik,j} + \Gamma^r_{ij}l_{rk} - \Gamma^r_{ik}l_{rj} \ \forall i,j,k \\
0 \overset{!}{=} C_{111} &= l_{11,1} - l_{11,1} + \Gamma^r_{11}l_{r1} - \Gamma^r_{11}l_{r1} = 0 \text{ trivial erfüllt} \\
0 \overset{!}{=} C_{112} &= l_{11,2} - \underbrace{l_{12,1}}_{=0} + \Gamma^r_{11}\underbrace{l_{r2}}_{=0,r=1} - \Gamma^r_{12}\underbrace{l_{r1}}_{=0,r=2} \\
&= (\lambda_1 A_1^2)_{,2} - 0 - \frac{A_1A_{1,2}}{A_2^2}\lambda_2 A_2^2 - \frac{A_{1,2}}{A_1}\lambda_1 A_1^2 \\
&= (\lambda_1 A_1^2)_{,2} - \frac{A_1A_{1,2}}{A_2^2}\lambda_2 A_2^2 - \frac{A_{1,2}}{A_1}\lambda_1 A_1^2 \\
\Leftrightarrow A_1A_{1,2}\lambda_2 &\overset{!}{=} A_1(\lambda_1A_1)_{,2} + \lambda_1A_1A_{1,2} - A_1A_{1,2}\lambda_1 \\
A_{1,2}\lambda_2 &\overset{!}{=} (\lambda_1A_1)_{,2} \\
\text{analog } 0 \overset{!}{=} C_{221} &= l_{22,1} - l_{21,2} + \Gamma^r_{22}l_{r1} - \Gamma^r_{21}l_{r2} \\
&\vdots \\
\Leftrightarrow A_{2,1}\lambda_1 &\overset{!}{=} (\lambda_2A_2)_{,1}
\end{aligned}
$$

Für die Gleichungen von Gauß, siehe Lemma 3.8.1, kann leicht nachgerechnet werden, daß z.B. die Bedingung

$$
\left(\frac{A_{2,1}}{A_1}\right)_{,1} + \left(\frac{A_{1,2}}{A_2}\right)_{,2} = -\lambda_1\lambda_2A_1A_2
$$

folgt.

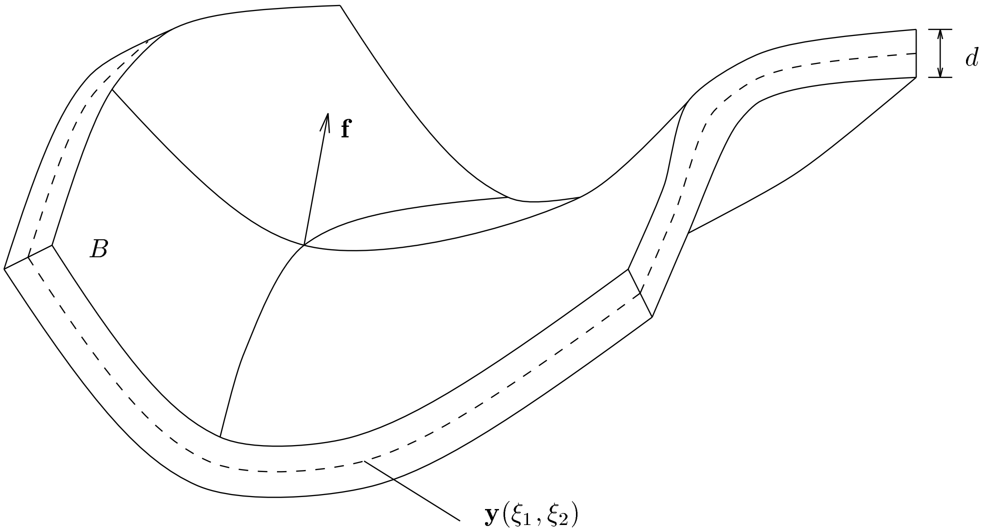
Kapitel 4

Anwendung - Bestimmung des Volumens einer gebogenen Schale

Die bisherigen Untersuchungen waren doch eher von theoretischer Natur. Deswegen wollen wir in diesem Abschnitt auf einig Anwendung der Theorien der Differentialgeometrie näher eingehen. Wir werden aufzeigen, wie man das Volumen einer gebogenen Schale bestimmt. Eine gebogene Schale kann z.B. ein gebogenes Blech sein, wie es z.B. im Karosseriebau oder Schiffsbau verwendet wird. Bei der Simulation von Schwingungen von Fahrzeugkarosserien oder Schiffsrümpfen greift man dabei auf die Finite-Element-Methode zurück und diese wiederum benötigt eine Berechnungsvorschrift des Volumens solcher gebogenen Schalen.
Wir untersuchen im folgenden einen Körper B, der durch die Parameterdarstellung

$$B = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \;:\; \mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \mathbf{y}(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \mathbf{f} \text{ mit } (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \Omega = \mathbf{I} \times [-d/2, d/2]\}$$

definiert ist. Hierbei entspricht $\mathbf{y}(\xi_1, \xi_2)$ der Parameterdarstellung der Mittelfläche, hier ist das die Fläche, die gestrichelt angedeutet ist. Desweiteren besitzt die Schale eine Dicke d und in jedem Flächenpunkt der Mittelfläche läßt sich der Normalenvektor $\mathbf{f}$ bestimmen.



Das Volumen dieses Körpers B bestimmt sich als Integral über die Volumenelemente dV

$$\int_B dV.$$

Ein Volumenelement ist dabei definiert als

$$dV = |\det(\mathbf{J})| \; d\xi_1 \; d\xi_2 \; d\xi_3.$$

Da man mit dieser Definition des Volumenelementes jedoch schwer umgehen kann verwenden wir die Vorschrift

$$dV = \sqrt{\det(\mathbf{J}^T\mathbf{J})}\; d\xi_1 \; d\xi_2 \; d\xi_3,$$

welche natürlich äquivalent zu der obigen ist. Hierbei entspricht $\mathbf{J}$ der Jacobimatrix der Parameterdarstellung des Körpers B.

$$\mathbf{J} = \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_3} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{y}_{,1} + \xi_3 \mathbf{f}_{,1} & \mathbf{y}_{,2} + \xi_3 \mathbf{f}_{,2} & \mathbf{f} \end{array} \right)$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^T\mathbf{J} &= \begin{pmatrix} (\mathbf{y}_{,1} + \xi_3\mathbf{f}_{,1})^T \\ (\mathbf{y}_{,2} + \xi_3\mathbf{f}_{,2})^T \\ \mathbf{f}^T \end{pmatrix} (\mathbf{y}_{,1} + \xi_3\mathbf{f}_{,1} \;\; \mathbf{y}_{,2} + \xi_3\mathbf{f}_{,2} \;\; \mathbf{f}) \\
&= \begin{pmatrix} (\mathbf{y}_{,1} + \xi_3\mathbf{f}_{,1})^T(\mathbf{y}_{,1} + \xi_3\mathbf{f}_{,1}) & (\mathbf{y}_{,1} + \xi_3\mathbf{f}_{,1})^T(\mathbf{y}_{,2} + \xi_3\mathbf{f}_{,2}) & (\mathbf{y}_{,1} + \xi_3\mathbf{f}_{,1})^T\mathbf{f} \\ (\mathbf{y}_{,2} + \xi_3\mathbf{f}_{,2})^T(\mathbf{y}_{,1} + \xi_3\mathbf{f}_{,1}) & (\mathbf{y}_{,2} + \xi_3\mathbf{f}_{,2})^T(\mathbf{y}_{,2} + \xi_3\mathbf{f}_{,2}) & (\mathbf{y}_{,2} + \xi_3\mathbf{f}_{,2})^T\mathbf{f} \\ \mathbf{f}^T(\mathbf{y}_{,1} + \xi_3\mathbf{f}_{,1}) & \mathbf{f}^T(\mathbf{y}_{,2} + \xi_3\mathbf{f}_{,2}) & \mathbf{f}^T\mathbf{f} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{,1}^T\mathbf{y}_{,1} + \xi_3\mathbf{y}_{,1}^T\mathbf{f}_{,1} + \xi_3\mathbf{f}_{,1}^T\mathbf{y}_{,1} + \xi_3^2\mathbf{f}_{,1}^T\mathbf{f}_{,1} & \mathbf{y}_{,1}^T\mathbf{y}_{,2} + \xi_3\mathbf{y}_{,1}^T\mathbf{f}_{,2} + \xi_3\mathbf{f}_{,1})^T\mathbf{y}_{,2} + \xi_3\mathbf{f}_{,1})^T\mathbf{f}_{,2} & \mathbf{y}_{,1}^T\mathbf{f} + \xi_3\mathbf{f}_{,1}^T\mathbf{f} \\ \mathbf{y}_{,2}^T\mathbf{y}_{,1} + \xi_3\mathbf{y}_{,2}^T\mathbf{f}_{,1} + \xi_3\mathbf{f}_{,2}^T\mathbf{y}_{,1} + \xi_3^2\mathbf{f}_{,2}^T\mathbf{f}_{,1} & \mathbf{y}_{,2}^T\mathbf{y}_{,2} + \xi_3\mathbf{y}_{,2}^T\mathbf{f}_{,2} + \xi_3\mathbf{f}_{,2}^T\mathbf{y}_{,2} + \xi_3^2\mathbf{f}_{,2}^T\mathbf{f}_{,2} & \mathbf{y}_{,2}^T\mathbf{f} + \xi_3\mathbf{f}_{,2}^T\mathbf{f} \\ \mathbf{f}^T\mathbf{y}_{,1} + \xi_3\mathbf{f}^T\mathbf{f}_{,1} & \mathbf{f}^T\mathbf{y}_{,2} + \xi_3\mathbf{f}^T\mathbf{f}_{,2} & \mathbf{f}^T\mathbf{f} \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{array}{lll} \text{da} & \mathbf{y}_{,i}^T\mathbf{y}_{,j} = (\mathbf{y}_{,i}, \mathbf{y}_{,j}) = g_{ij} & \text{1. metrische Fundamentalgröße,} \\ & \mathbf{f}^T\mathbf{f} = 1 & \text{da } \mathbf{f} \text{ normiert,} \\ & \mathbf{f}_{,i}^T\mathbf{f} = 0 & \text{da } \mathbf{f} \text{ normiert und} \\ & \mathbf{y}_{,i}^T\mathbf{f} = 0 & \text{da } \mathbf{y}_{,i} \perp \mathbf{f} \text{ folgt} \end{array} \\
&= \begin{pmatrix} g_{11} + 2\xi_3\mathbf{y}_{,1}^T\mathbf{f}_{,1} + \xi_3^2\mathbf{f}_{,1}^T\mathbf{f}_{,1} & g_{12} + \xi_3(\mathbf{y}_{,1}^T\mathbf{f}_{,2} + \mathbf{f}_{,1}^T\mathbf{y}_{,2}) + \xi_3\mathbf{f}_{,1}^T\mathbf{f}_{,2} & 0 \\ g_{21} + \xi_3(\mathbf{y}_{,2}^T\mathbf{f}_{,1} + \mathbf{f}_{,2}^T\mathbf{y}_{,1}) + \xi_3^2\mathbf{f}_{,2}^T\mathbf{f}_{,1} & g_{22} + 2\xi_3\mathbf{y}_{,2}^T\mathbf{f}_{,2} + \xi_3^2\mathbf{f}_{,2}^T\mathbf{f}_{,2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \xi_3 \begin{pmatrix} 2\mathbf{y}_{,1}^T\mathbf{f}_{,1} & \mathbf{y}_{,1}^T\mathbf{f}_{,2} + \mathbf{f}_{,1}^T\mathbf{y}_{,2} & 0 \\ \mathbf{y}_{,2}^T\mathbf{f}_{,1} + \mathbf{f}_{,2}^T\mathbf{y}_{,1} & 2\mathbf{y}_{,2}^T\mathbf{f}_{,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \xi_3^2 \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{,1}^T\mathbf{f}_{,1} & \mathbf{f}_{,1}^T\mathbf{f}_{,2} & 0 \\ \mathbf{f}_{,2}^T\mathbf{f}_{,1} & \mathbf{f}_{,2}^T\mathbf{f}_{,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Untersuchen wir nun die einzelnen Matrixeinträge, so ergibt sich zum einen mit Hilfe der Ableitungsgleichungen von Weingarten, siehe Definition 3.5.3,

$$\mathbf{y}_{,i}^T\mathbf{f}_{,j} = (\mathbf{y}_{,i}, \mathbf{f}_{,j}) = (\mathbf{y}_{,i}, -l_{jk}g^{kl}\mathbf{y}_{,l}) = -l_{jk}g^{kl}(\mathbf{y}_{,i}, \mathbf{y}_{,l}) = -l_{jk}g^{kl}g_{il} = -l_{jk}\delta_{ki} = -l_{ji} = -l_{ij}$$

und zum anderen

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{,i}^T\mathbf{f}_{,j} &= (\mathbf{f}_{,i}, \mathbf{f}_{,j}) = (-l_{im}g^{mn}\mathbf{y}_{,n}, -l_{jk}g^{kl}\mathbf{y}_{,l}) = l_{im}g^{mn}l_{jk}g^{kl}(\mathbf{y}_{,n}, \mathbf{y}_{,l}) = l_{im}g^{mn}l_{jk}g^{kl}g_{nl} = l_{im}g^{mn}l_{jk}\delta_{kn} \\
&= l_{im}g^{mk}l_{jk} = l_{im}g^{mk}l_{kj}.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich folgende Eigenschaft

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^T\mathbf{J} &= \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \xi_3 \begin{pmatrix} -2l_{11} & -2l_{12} & 0 \\ -2l_{21} & -2l_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \xi_3^2 \begin{pmatrix} l_{1m}g^{mk}l_{k1} & l_{1m}g^{mk}l_{k2} & 0 \\ l_{2m}g^{mk}l_{k1} & l_{2m}g^{mk}l_{k2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{G} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\xi_3 \begin{pmatrix} \mathbf{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \xi_3^2 \begin{pmatrix} \mathbf{L}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{G} - 2\xi_3\mathbf{L} + \xi_3^2\mathbf{L}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{G} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} - 2\xi_3\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L} + \xi_3^2\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{G} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} - 2\xi_3\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L} + (\xi_3\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L})^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Demnach ergibt sich für die Berechnung eines Volumenelementes

$$dV = \sqrt{\det(\mathbf{J}^T\mathbf{J})}\; d\xi_1\; d\xi_2\; d\xi_3 = \sqrt{\det(\mathbf{G})}\sqrt{\det(\mathbf{I} - 2\xi_3\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L} + (\xi_3\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L})^2)}\; d\xi_1\; d\xi_2\; d\xi_3.$$

Untersuchen wir den Ausdruck unter der zweiten Wurzel.

$$\begin{aligned}
&\det(\mathbf{I} - 2\xi_3\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L} + (\xi_3\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L})^2)\\
&= \det((\mathbf{I} - \xi_3\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L})^2)\\
&= (\det(\mathbf{I} - \xi_3\mathbf{G}^{-1}\mathbf{L}))^2\\
&= \left(\frac{\det(\mathbf{G} - \xi_3\mathbf{L})}{\det(\mathbf{G})}\right)^2\\
&= \left(\frac{(g_{11} - \xi_3 l_{11})(g_{22} - \xi_3 l_{22}) - (g_{12} - \xi_3 l_{12})(g_{21} - \xi_3 l_{21})}{\det(\mathbf{G})}\right)^2\\
&= \left(\frac{g_{11}g_{22} - \xi_3 l_{22}g_{11} - \xi_3 l_{11}g_{22} + \xi_3^2 l_{11}l_{22} - g_{12}g_{21} + \xi_3 l_{21}g_{12} + \xi_3 l_{12}g_{21} - \xi_3^2 l_{12}l_{21}}{\det(\mathbf{G})}\right)^2\\
&= \left(\frac{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} - \xi_3(l_{22}g_{11} + l_{11}g_{22} - 2l_{21}g_{12}) + \xi_3^2(l_{11}l_{22} - l_{12}l_{21})}{\det(\mathbf{G})}\right)^2\\
&= \left(\frac{\det(\mathbf{G})}{\det(\mathbf{G})} - \xi_3\frac{l_{22}g_{11} + l_{11}g_{22} - 2l_{21}g_{12}}{\det(\mathbf{G})} + \xi_3^2\frac{\det(\mathbf{L})}{\det(\mathbf{G})}\right)^2\\
&= (1 - 2\xi_3 H + \xi_3^2 K)^2
\end{aligned}$$

Hierbei repräsentiert H wieder die Mittlere und K die Gaußsche Krümmung. Letztendlich ergibt sich für ein Volumenelement

$$dV = \sqrt{\det(\mathbf{G})}\;|1 - 2\xi_3 H + \xi_3^2 K|.$$

Vom geometrischen bzw. physikalischem Standpunkt gibt es keine Volumenelemente mit $dV = 0$. Daraus folgt die Forderung

$$dV = \sqrt{\det(\mathbf{G})}\;|1 - 2\xi_3 H + \xi_3^2 K| \neq 0\;\forall \xi_3 \in [-d/2, d/2].$$

Da die erste metrische Fundamentalgröße echt positiv definit ist, gilt immer $\sqrt{\det(\mathbf{G})} > 0$. Somit ist die Funktion

$$f(\xi_3) = |1 - 2\xi_3 H + \xi_3^2 K|$$

auf Nullstellen zu untersuchen, die gerade den reziproken Nullstellen der Funktion

$$\tilde{f}(\tilde{\xi_3}) = |\tilde{\xi}_3^2 - 2\tilde{\xi}_3 H + K| \;\;\text{mit}\;\xi_3 = \frac{1}{\tilde{\xi}_3}$$

entsprechen und demnach nicht im Intervall $[-d/2, d/2]$ liegen dürfen. Die beiden Nullstellen $\lambda_{1,2}$ der Funktion $\tilde{f}(\tilde{\xi_3})$ erfüllen nach dem Wurzelsatz von Vieta die Bedingungen

$$2H = \lambda_1 + \lambda_2 \;\;\text{und}\;\; K = \lambda_1\lambda_2.$$

Demnach entsprechen die Nullstellen $\lambda_{1,2}$ gerade den Hauptkrümmungen der Mittelfläche. Damit $\xi_3 \in [-d/2, d/2]$ nicht diese Nullstellen durchlaufen kann, muß

$$\max|\xi_3| = \frac{d}{2} < min|\frac{1}{\lambda_i}|\;\forall \xi_1, \xi_2$$

gelten. Wird diese Bedingung verletzt, würde es zur Selbstdurchdringung des Materials kommen.
Aus dieser Bedingung folgen somit nur positive Volumenelemente und wir können in der weiteren Betrachtung

auf die Betragsstriche verzichten und erhalten schließlich eine Berechnungsvorschrift für das gesamte Volumen der Schale.

$$
\begin{aligned}
V &= \int\limits_B dV \\
&= \iiint\limits_\Omega \sqrt{\det(\mathbf{G})}\ (1 - 2\xi_3 H + \xi_3^2 K)\ d\xi_1\ d\xi_2\ d\xi_3 \\
&= \int\limits_{-d/2}^{d/2} \iint\limits_{\mathbf{I}} (1 - 2\xi_3 H + \xi_3^2 K)\ \sqrt{\det(\mathbf{G})}\ d\xi_1 d\xi_2\ d\xi_3 \\
& \quad \text{mit dem Flächenelement } dA_F \text{ (3.3-5) folgt} \\
&= \int\limits_{-d/2}^{d/2} \int\limits_F (1 - 2\xi_3 H + \xi_3^2 K)\ dA_F\ d\xi_3 \\
&= \int\limits_F \int\limits_{-d/2}^{d/2} (1 - 2\xi_3 H + \xi_3^2 K)\ d\xi_3\ dA_F \\
&= \int\limits_F (\xi_3 - \xi_3^2 H + \frac{1}{3}\xi_3^3 K)|_{-d/2}^{d/2}\ dA_F \\
&= \int\limits_F (\frac{d}{2} - \frac{d}{2}) - ((\frac{d}{2})^2 H - (-\frac{d}{2})^2 H) + (\frac{1}{3}(\frac{d}{2})^3 K - \frac{1}{3}(-\frac{d}{2})^3 K)\ dA_F \\
&= d \int\limits_F dA_F - \int\limits_F 0\ dA_F + \frac{d^3}{12} \int\limits_F K\ dA_F \\
&= d \int\limits_F dA_F + \frac{d^3}{12} \int\limits_F K\ dA_F \qquad (4.0\text{-}1) \\
&= d * (\text{Flächeninhalt der Mittelfläche}) + \frac{d^3}{12} * (\text{Gesamtkrümmung}) \\
&= d \iint\limits_{\mathbf{I}} \sqrt{\det(\mathbf{G})}\ d\xi_1 d\xi_2 + \frac{d^3}{12} \iint\limits_{\mathbf{I}} K\ \sqrt{\det(\mathbf{G})}\ d\xi_1 d\xi_2
\end{aligned}
$$

Beispiel: Hohlzylinder In diesem Beispiel wollen wir das Volumen eines Hohlzylinders mit dem Radius R der Mittelfläche, der Manteldicke d und der Höhe h bestimmen. Die Parameterdarstellung der Mittelfläche ist somit die eines Zylinders

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} R\cos(u^1) \\ R\sin(u^1) \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad u^1 \in [0, 2\pi), \ u^2 \in [0, h].$$

Aus dem Beispiel auf Seite 64 haben wir bereits die erste metrische Fundamentalgröße und die Hauptkrümmungen bestimmt.

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \sqrt{\det(\mathbf{G})} = R$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= \frac{R^2}{\sqrt{(R^2\sin^2(u^1) + R^2\cos^2(u^1))^3}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow K = \lambda_1\lambda_2 = 0$$

Für das Volumen des Hohlzylinders ergibt sich demnach

$$V = d \iint\limits_{\mathbf{I}} \sqrt{\det(\mathbf{G})}\ du^2 du^1 + \frac{d^3}{12} \iint\limits_{\mathbf{I}} K\ \sqrt{\det(\mathbf{G})}\ du^2 du^1$$

$$= d\int_0^{2\pi}\int_0^h R\ du^2du^1 = dR\int_0^{2\pi}\int_0^h\ du^2du^1 = 2\pi dRh$$

■

Beispiel: Hohlkugel Da die Gaußche Krümmung der Kugel, siehe Beispiel auf Seite 99, nicht identisch Null ist, tritt bei der Hohlkugel der zweite Term, der die Gesamtkrümmung enthält, wirklich auf. Die Mittelfläche hat den Radius R und die Manteldicke ist wieder d.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} R\cos(u^1)\cos(u^2) \\ R\sin(u^1)\cos(u^2) \\ R\sin(u^2) \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} u^1 \in [0, 2\pi) \\ u^2 \in (-\pi/2, \pi/2) \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} R^2\cos^2(u^2) & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}, \Rightarrow \sqrt{\det(\mathbf{G})} = R^2\cos(u^2)$$

$$\Rightarrow \qquad K = \tfrac{1}{R^2}$$

Für das Volumen der Hohlkugel folgt somit

$$\begin{aligned}
V &= d\iint\limits_{\mathbf{I}} \sqrt{\det(\mathbf{G})}\ du^2du^1 + \frac{d^3}{12}\iint\limits_{\mathbf{I}} K\ \sqrt{\det(\mathbf{G})}\ du^2du^1 \\
&= d\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2\cos(u^2)\ du^2du^1 + \frac{d^3}{12}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{R^2}\ R^2\cos(u^2)\ du^2du^1 \\
&= dR^2\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u^2)\ du^2du^1 + \frac{d^3}{12}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u^2)\ du^2du^1 \\
& \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u^2)\ du^2du^1 = \int_0^{2\pi} \sin(u^2)|_{-\pi/2}^{\pi/2}\ du^1 = \int_0^{2\pi} 2\ du^1 = 4\pi \\
&= dR^2 4\pi + \frac{d^3}{12}4\pi \\
&= 4\pi dR^2 + \frac{\pi}{3}d^3.
\end{aligned}$$

■

Lemma 4.0.1 (Volumen von Schalen mit geschlossener Mittelfläche) *Jede Schale mit einer geschlossenen orientierbaren Mittelfläche F hat das Volumen*

$$V = d \int_F dA_F + \frac{\pi}{3} d^3 (1-p),$$

wobei d die Manteldicke und p das Geschlecht sowie $\int_F dA_F$ der Oberflächeninhalt der Mittelfläche sind.

Beweis: Das Volumen einer Schale ist nach (4.0-1) durch

$$V = d \int_F dA_F + \frac{d^3}{12} \int_F K \; dA_F$$

bestimmt. Mit dem Lemma 3.9.1 bestimmt sich die Gesamtkrümmung geschlossener orientierbarer Flächen durch

$$\int_F K \; dA_F = 4\pi(1-p).$$

Somit folgt

$$V = d \int_F dA_F + \frac{d^3}{12} 4\pi(1-p) = d \int_F dA_F + \frac{\pi}{3} d^3 (1-p).$$

Kapitel 5

Formelsammlung

5.1 Kurventheorie

Bogenlänge:

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\mathbf{y}}(\tau)| d\tau$$

siehe Seite 19

$s(t)$	Bogenlänge
$\mathbf{y}(\tau)$	Parameterdarstellung der Kurve

Tangentialvektor:

$$\mathbf{t}(s) = \mathbf{y}'(s) = \frac{\dot{\mathbf{y}}(t)}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|}$$

siehe Seite 21

$\mathbf{t}$	Tangentialvektor
$\mathbf{y}'$	1. Ableitung nach s
$\dot{\mathbf{y}}$	1. Ableitung nach t

Hauptnormalenvektor:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(s) &= \frac{\bar{\mathbf{y}}''(s)}{|\bar{\mathbf{y}}''(s)|} \\ &= \frac{|\dot{\mathbf{y}}(t)|^2\ddot{\mathbf{y}}(t) - (\ddot{\mathbf{y}}(t),\dot{\mathbf{y}}(t))\dot{\mathbf{y}}(t)}{||\dot{\mathbf{y}}(t)|^2\ddot{\mathbf{y}}(t) - (\ddot{\mathbf{y}}(t),\dot{\mathbf{y}}(t))\dot{\mathbf{y}}(t)|} \\ &= \frac{\dot{\mathbf{y}}(t)\times\ddot{\mathbf{y}}(t)}{|\dot{\mathbf{y}}(t)\times\ddot{\mathbf{y}}(t)|} \times \frac{\dot{\mathbf{y}}(t)}{|\dot{\mathbf{y}}(t)|} \end{aligned}$$

siehe Seite 21

$\mathbf{n}$	Hauptnormalenvektor
$\mathbf{y}''$	2. Ableitung nach s
$\ddot{\mathbf{y}}$	2. Ableitung nach t

Binormalenvektor:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(s) &= \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) \\ &= \frac{\dot{\mathbf{y}}(t)\times\ddot{\mathbf{y}}(t)}{|\dot{\mathbf{y}}(t)\times\ddot{\mathbf{y}}(t)|} \end{aligned}$$

siehe Seite 21

$\mathbf{t}$	Tangentialvektor
$\mathbf{n}$	Hauptnormalenvektor

Krümmung:

$$\begin{aligned} k(s) &= |\bar{\mathbf{y}}''(s)| = (\mathbf{t}', \mathbf{n}) = -(\mathbf{n}', \mathbf{t}) \\ &= \frac{|\dot{\mathbf{y}}\times\ddot{\mathbf{y}}|}{|\dot{\mathbf{y}}|^3} \end{aligned}$$

siehe Seiten 22,28

$k(s)$	Krümmung nach s
$\mathbf{y}''$	2. Ableitung nach s
$\mathbf{t}$	Tangentialvektor
$\mathbf{n}$	Hauptnormalenvektor

Krümmungsvektor:

$$\mathbf{y}''(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$$

siehe Seiten 59

$k(s)$	Krümmung nach s
$\mathbf{n}(s)$	Hauptnormalenvektor

Windung / Torsion:

$$w(s) = (\mathbf{n}', \mathbf{b}) = -(\mathbf{b}', \mathbf{n}) = [\mathbf{t}, \mathbf{n}, \frac{\mathbf{y}'''}{|\mathbf{y}''|}]$$
$$= \frac{[\mathbf{y}', \mathbf{y}'', \mathbf{y}''']}{|\mathbf{y}''|^2}$$
$$= \frac{[\dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \dddot{\mathbf{y}}]}{|\dot{\mathbf{y}} \times \ddot{\mathbf{y}}|^2}$$

siehe Seiten 26,27,28

$w(s)$	Windung / Torsion
$\mathbf{y}$	Parameterdarstellung der Kurve
$\mathbf{t}$	Tangentialvektors
$\mathbf{n}$	Hauptnormalenvektors
$\mathbf{b}$	Binormalenvektor

Frenetsche Formeln:

$$\mathbf{t}' = k\mathbf{n}$$
$$\mathbf{n}' = -k\mathbf{t} + w\mathbf{b}$$
$$\mathbf{b}' = -w\mathbf{n}$$

siehe Seiten 27

k	Krümmung
w	Windung / Torsion
$\mathbf{t}$	Tangentialvektors
$\mathbf{n}$	Hauptnormalenvektors
$\mathbf{b}$	Binormalenvektor

Schmiegeebene:

$$E_S(s) = \mathbf{y}(s) + span(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s))$$

siehe Seiten 30

$\mathbf{y}(s)$	Kurvenpunkt
$\mathbf{t}$	Tangentialvektors
$\mathbf{n}$	Hauptnormalenvektors

Normalebene:

$$E_N(s) = \mathbf{y}(s) + span(\mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$$

siehe Seiten 30

$\mathbf{y}(s)$	Kurvenpunkt
$\mathbf{n}$	Hauptnormalenvektors
$\mathbf{b}$	Binormalenvektor

Streckebene:

$$E_{St}(s) = \mathbf{y}(s) + span(\mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s))$$

siehe Seiten 30

$\mathbf{y}(s)$	Kurvenpunkt
$\mathbf{t}$	Tangentialvektors
$\mathbf{b}$	Binormalenvektor

Evolute:

$$\mathbf{m}(s) = \mathbf{y}(s) + \frac{\mathbf{y}''(s)}{|\mathbf{y}''(s)|^2}$$
$$\mathbf{m}(t) = \mathbf{y}(t) + \frac{|\dot{\mathbf{y}}(t)|^2}{|\dot{\mathbf{y}}(t) \times \ddot{\mathbf{y}}(t)|^2}(\dot{\mathbf{y}}(t) \times \ddot{\mathbf{y}}(t)) \times \dot{\mathbf{y}}(t)$$
$$= \mathbf{y}(t) + |\dot{\mathbf{y}}(t)|^2 \frac{\ddot{\mathbf{y}}(t)|\dot{\mathbf{y}}(t)|^2 - \dot{\mathbf{y}}(t)(\dot{\mathbf{y}}(t), \ddot{\mathbf{y}}(t))}{|\ddot{\mathbf{y}}(t)|^2 |\dot{\mathbf{y}}(t)|^2 - (\dot{\mathbf{y}}(t), \ddot{\mathbf{y}}(t))^2}$$

siehe Seiten 33,34

$\mathbf{m}$	Parameterdarstellung der Evolute
$\mathbf{y}$	Parameterdarstellung der Kurve

Evolvente:

$$\mathbf{e}(s) = \mathbf{y}(s) - (s - s_0)\mathbf{t}(s)\}$$

siehe Seite 34

$\mathbf{e}$	Parameterdarstellung der Evolvente
$\mathbf{y}$	Parameterdarstellung der Kurve
$\mathbf{t}$	Tangentialvektor der Kurve fester Startparameter

5.2 Flächen im Raum

Tangentialvektoren:

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\partial}{\partial u^1}\mathbf{x}(u^1, u_0^2)\big|_{u_0^1}$$
$$\mathbf{t}_2 = \frac{\partial}{\partial u^2}\mathbf{x}(u_0^1, u^2)\big|_{u_0^2}$$

siehe Seite 39

$\mathbf{x}(u^1, u^2)$	Parameterdarstellung der Fläche
$\frac{\partial}{\partial u^i}$	partielle Ableitung der Fläche nach u^i

Flächennormalenvektor:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2}{|\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2|} = \frac{\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}}{|\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}|}$$

siehe Seite 42

$\mathbf{f}$	Flächennormalenvektor
$\mathbf{t}_i$	Tangentenvektor
$\mathbf{x}_{,i}$	partielle Ableitung der Fläche nach u^i (Tangentenvektor)

1. metrische Fundamentalgröße:

$$\mathbf{G} = (g_{ij})_{ij=1}^{2} \quad \text{mit} \quad g_{ij} = (\mathbf{x}_{,i}\ ,\ \mathbf{x}_{,j})$$

siehe Seite 55
- g_{ij} Matrixelemente der 1. metr. Fundamentalgröße
- $\mathbf{x}_{,i}$ partielle Ableitung der Parameterdarstellung der Fläche

Bogenlänge von Kurven auf Flächen:

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{\underline{u}}^T \mathbf{G} \dot{\underline{u}}}\ dt$$

siehe Seite 56
- $\mathbf{G}$ 1. metr. Fundamentalgröße
- $\underline{u}$ beinhaltet die Parameterdarstellung der Kurven

Schnittwinkel von Kurven auf Flächen:

$$\cos(\sphericalangle(\Gamma_1, \Gamma_2)) = \frac{\dot{\underline{u}}_2^T \mathbf{G} \dot{\underline{u}}_1}{\sqrt{\dot{\underline{u}}_1^T \mathbf{G} \dot{\underline{u}}_1}\ \sqrt{\dot{\underline{u}}_2^T \mathbf{G} \dot{\underline{u}}_2}}.$$

siehe Seite 56
- $\mathbf{G}$ 1. metr. Fundamentalgröße
- $\underline{u}_i$ beinhaltet die Parameterdarstellung der Kurven

Flächeninhalt von Flächenstücken:

$$A_F = \iint_{\mathbf{I}} \sqrt{det\ \mathbf{G}}\ du^1 du^2$$

siehe Seite 58
- $\mathbf{G}$ 1. metr. Fundamentalgröße
- $\underline{u}_i$ beinhaltet die Parameterdarstellung der Kurven

2. metrische Fundamentalgröße:

$$\mathbf{L} = (l_{ij})_{i,j=1}^{2} \quad \text{mit} \quad l_{ij} = (\mathbf{x}_{,ij}(s), \mathbf{f}(s))$$

siehe Seite 61
- l_{ij} Matrixelemente der 2. metr. Fundamentalgröße
- $\mathbf{x}_{,ij}$ 2. partielle Ableitung der Parameterdarstellung der Fläche
- $\mathbf{f}(s)$ Flächennormalenvektor

Normalkrümmung:

$$\begin{aligned} k_n(s) &= (\mathbf{y}''(s), \mathbf{f}(s)) \\ &= \underline{u}'^T(s)\mathbf{L}(s)\underline{u}'(s) \end{aligned}$$

siehe Seite 60
- $\mathbf{L}$ 2. metr. Fundamentalgröße
- $\underline{u}$ beinhaltet die Parameterdarstellung der Kurve

geodätische Krümmung:

$$\begin{aligned} k_g(s) &= (\mathbf{y}''(s), \mathbf{f}(s) \times \mathbf{y}'(s)) \\ &= [\mathbf{f}(s), \mathbf{y}'(s), \mathbf{y}''(s)] \\ &= (u^{1\prime}(u^{2\prime\prime} + u^{j\prime}u^{k\prime}\Gamma^2_{jk}) \\ &\quad -u^{2\prime}(u^{1\prime\prime} + u^{j\prime}u^{k\prime}\Gamma^1_{jk}))\ \sqrt{det(\mathbf{G})} \end{aligned}$$

siehe Seiten 61,91
- $\mathbf{y}(s)$ Parameterdarstellung der Kurve
- $\mathbf{f}(s)$ Flächennormalenvektor
- u^i beinhaltet die Parameterdarstellung der Kurven
- Γ^i_{jk} Christoffel-Symbol
- $\mathbf{G}$ 1. metr. Fundamentalgröße

Extremale Normalkrümmung:

$$\begin{aligned} k_{n\,min} &= \min_{\forall \underline{v} \neq 0} \frac{\underline{v}^T \mathbf{L} \underline{v}}{\underline{v}^T \mathbf{G} \underline{v}} \\ &= \min_{i=1,2} \lambda_i \text{ mit } \lambda_i \text{ ist Eigenwert der} \\ &\qquad \text{Eigenwertgleichung } \mathbf{L}\underline{v} = \lambda \mathbf{G} \underline{v} \end{aligned}$$

siehe Seiten 62,63
- $\mathbf{G}$ 1. metr. Fundamentalgröße
- $\mathbf{L}$ 2. metr. Fundamentalgröße
- $\underline{v}$ Richtung der extremalen Normalkrümmung in der Parameterebene

(Maximum analog)

Mittlere Krümmung:

$$\begin{aligned} H &= (\lambda_1 + \lambda_2)/2 \\ &= \frac{(l_{22}g_{11} + l_{11}g_{22} - 2l_{12}g_{12})}{2\ det(\mathbf{G})} \end{aligned}$$

siehe Seiten 66,67
- λ_i extremale Krümmungen
- $\mathbf{G}$ 1. metr. Fundamentalgröße
- g_{ij} Matrixelemente der 1. metr. Fundamentalgröße
- l_{ij} Matrixelemente der 2. metr. Fundamentalgröße

Gaußsche Krümmung:

$$\begin{aligned} K &= \lambda_1 \lambda_2 \\ &= \frac{det(\mathbf{L})}{det(\mathbf{G})} \\ &= \frac{[\mathbf{f}(u^1,u^2),\mathbf{f}_{,1}(u^1,u^2),\mathbf{f}_{,2}(u^1,u^2)]}{[\mathbf{f}(u^1,u^2),\mathbf{x}_{,1}(u^1,u^2),\mathbf{x}_{,2}(u^1,u^2)]} \end{aligned}$$

siehe Seiten 66,67,71

λ_i Hauptkrümmungen
$\mathbf{G}$ 1. metr. Fundamentalgröße
$\mathbf{L}$ 2. metr. Fundamentalgröße
$\mathbf{x}_{,i}$ partielle Ableitung der Parameterdarstellung der Fläche
$\mathbf{f}$ Flächennormalenvektor
$\mathbf{f}_{,i}$ partielle Ableitung des Flächennormalenvektors

Indikatrix:

$$I = \{\underline{v} \in E_T : \ \underline{v}^T \mathbf{L} \underline{v} = \pm 1\}$$

siehe Seite 68

E_T Tangentialebene der Fläche im Flächenpunkt
$\underline{v}$ Vektor der Tangentialebene
$\mathbf{L}$ 2. metr. Fundamentalgröße

Christoffel-Symbol:

$$\Gamma_{ij}^n = \frac{1}{2} g^{nm} (g_{mi,j} + g_{jm,i} - g_{ij,m})$$

siehe Seite 70

g_{ij} Matrixelemente der 1. metr. Fundamentalgröße
g^{ij} Matrixelemente der Inversen 1. metr. Fundamentalgröße

Ableitungsgleichungen von Gauß:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{,ij} &= \Gamma_{ij}^1 \mathbf{x}_{,1} + \Gamma_{ij}^2 \mathbf{x}_{,2} + l_{ij} \mathbf{f} \\ (\mathbf{x}_{,k}, \mathbf{x}_{,ij}) &= \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \Gamma_{ij}^l g_{kl} \end{aligned}$$

siehe Seite 69

Γ_{ij}^k Christoffelsymbole
$\mathbf{x}_{,i}$ partielle Ableitung der Parameter darstellung der Fläche
g_{ij} Matrixelemente der 1. metr. Funda mentalgröße
l_{ij} Matrixelemente der 2. metr. Funda mentalgröße
$\mathbf{f}$ Flächennormalenvektor

Ableitungsgleichungen von Weingarten:

$$\mathbf{f}_{,i} = -l_{ik} g^{kj} \mathbf{x}_{,j}$$

siehe Seite 71

g_{ij} Matrixelemente der 1. metr. Fundamentalgröße
l_{ij} Matrixelemente der 2. metr. Fundamentalgröße

Gesamtkrümmung:

$$A_{\hat{F}} = \int_F K \, dA_F$$

siehe Seite 97

K Gaußsche Krümmung
A_F zu betrachtendes Flächenstück

Literatur

[Alexan] Alexandrow, A.D.: *Die innere Geometrie der konvexen Flächen*. Berlin: Akademie-Verlag-Berlin 1953

[Bartsc] Bartsch, H.-J.: *Mathematische Formeln*. Leipzig: VEB Fachbuchverlag Leipzig 1986

[Bronst] Bronstein, I.N. ; Semendjajew, K.A.: *Taschenbuch der Mathematik*. Leipzig: Teubner Verlagsgesellschaft 1989

[BlaRei] Blaschke, W. ; Reichardt, H.: *Einführung in die Differentialgeometrie*. Hamburg, Berlin: Springer-Verlag Berlin Göttingen Heidelberg 1960

[DeuHoh] Deuflhard, P. ; Hohmann, A.: *Numerische Mathematik - Eine algorithmisch orientierte Einführung*. Berlin: Walter de Gruyter Berlin-New York 1991

[Ficht1] Fichtenholz, G.M.: *Differential- und Integralrechnung*. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1989

[Haack] Haack, W.: *Elementare Differentialgeometrie*. Berlin: Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart 1955

[Jost] Jost, J.: *Differentialgeometrie und minimalflächen*. Bochum: Springer-Verlag Berlin Heidelberg NewYork 1993

[Klotz1] Klotzek, B.: *Einführung in die Differentialgeometrie I*. Potsdam: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1981

[Klotz2] Klotzek, B.: *Einführung in die Differentialgeometrie II*. Potsdam: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1982

[Weilei] Weileitner, H.: *Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung*. Speyer: G.J.Göschensche Verlagshandlung Leipzig 1905

[Wünsch] Wünsch, V.: *Differentialgeometrie - Kurven und Flächen*. Jena: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart Leipzig Februar 1997

Index

Abbidung
Gauss, 96
Ableitung
einer Vektorfunktion eines Parameters, 13
einer Vektorfunktion zweier Parameter, 14
eines skalaren Feldes, 12
Ableitungsgleichung
von Gauss, 69
von Weingarten, 69, 71
Abwickelbarkeit, 87, 91

Böschungslinie, 35
begleitendes Dreibein
einer Fläche, 42
einer Kurve, 21, 22
Betrag im euklidischen Raum $\mathbf{R}^3$, 10
Binormalenvektor, 21, 22
Bogenelement, 19, 54
von Flächenkurven, 54, 56
Bogenlänge, 18, 19, 86
von Flächenkurven, 56
von Teilkurven aus 1. metrischer Fundamentalgrösse, 55
Bonnet, 96, 97

Christoffel-Symbol, 69
innergeometrische Grösse, 89
Clairantsche Relation, 80, 93
Codazzi
Gleichungen von Mainardi/ -, 91

Determinante einer Matrix, 10
Dreibein
begleitendes Dreibein einer Fläche, 42
begleitendes Dreibein einer Kurve, 21, 22
Dupin, 68

Ebene, 12
Normalebene, 30, 31
Schmiegeebene, 30, 31
Streckebene, 30, 31
einschaliges Hyperboloid, 48
Einsteinsche Summenkonvention, 40
Ellipse, 21
Evolute, 34
Krümmung, 28
Windung, 28
Ellipsoid, 64
Hauptkrümmung, 64

elliptischer Punkt, 67
elliptischer Zylinder, 64
erste metrische Fundamentalgrösse, 54, 55
Evolute, 33, 34
Evolvente, 33, 34

Feld
skalares, 12
Fläche, 39
Minimalfläche, 81
Flächeninhalt aus 1. metrischer Fundamentalgrösse, 57
Flächennormalenvektor, 42
einer Regelfläche, 52
Flachenorthonormalsystem, 103
Flachpunkt, 63
Formeln
Binormalenvektor, 22, 113
Bogenlänge, 19, 113
Bogenlänge von Kurven auf Flächen, 56, 115
Christoffel-Symbol, 78, 116
erste metrische Fundamentalgrösse, 55, 115
Flächeninhalt von Flächenstücken, 58, 115
Flächennormalenvektor, 42, 114, 115
Frenetsche, 25, 27, 114
geodätische Krümmung, 76, 115
Gesamtkrümmung, 97, 116
Hauptnormalenvektor, 22, 113
Krümmung einer Kurve, 21, 26–28, 113
Krümmungsvektor einer Kurve, 59, 113
Kreuzprodukt, 11
Normalenvektor einer Fläche, 42, 114
Normalkrümmung, 76, 115
Schnittwinkel von Kurven auf Flächen, 56, 115
Skalarprodukt, 11
Spatprodukt, 11
Tangentialvektor einer Fläche, 39, 114
Tangentialvektor einer Kurve, 22, 113
Torsion, 26
Windung, 26–28, 114
zweite metrische Fundamentalgrösse, 61, 115
Frenetsche Formeln, 25, 27
Fundamentalgrösse
erste metrische, 54, 55
zweite metrische, 59, 61
Funktion
skalare, 12
Vektorfunktion dreier Parameter, 14

Vektorfunktion eines Parameters, 13
Vektorfunktion zweier Parameter, 14

Gauss, 69, 96, 97
Gleichungen von -, 91
Gauss-Abbildung, 96
Gaussche Krümmung, 66, 67, 71
innergeometrische Grösse, 90
Gaussche Krummung
bei geodatischer Polarkoordinaten, 101
Gaussche Parametrisierung, 43
Hinreichende und notwendige Bedingung, 57
geodätische Krümmung, 59, 72
einer Fläche, 59
innergeometrische Grösse, 91
geodätische Linie, 72, 74
auf Kegel, 91
auf Rotationsfläche, 79, 91
geodatische Polarkoordinaten, 100
Gerade, 12
begleitendes Dreibein, 23
Bogenlänge, 19
zulässige Parametrisierung, 17
Gesamtkrümmung, 96, 97
geschlossener Flächen, 99
Geschlecht von Flächen, 99
geschlossen, 98
Gleichungen von Mainardi/Codazzi, 91
Glockenkurve, 45
Gratlinie, 51

Hauptkrümmung, 62, 63
Hauptnormalenvektor, 21, 22
Hauptsatz der Kurventheorie, 27
Hinreichende und notwendige Bedingung einer Minimalfläche, 83
Hohlkugel
Volumen einer -, 111
Hohlzylinder
Volumen eines -, 110
homöomorph, 98
hyperbolischer Punkt, 67
hyperbolisches Paraboloid, 45
Hauptkrümmung, 65
Hyperboloid
einschaliges, 48
Rotations-, 49

Indikatrix, 68
innere Geometrie von Flächen, 86
innergeometrische Grössen, 89

Katenoid, 86
verbiegbar in die Wendelfläche, 88
Kegel, 87
-fläche, 50
Gaussche Parametrisierung, 44
geodätische Linien, 91
zulässige Parametrisierung, 42
Klasseneinteilung der Flächenpunkte, 67
Klothoide, 37
kompakt, 98
Koordinatenlinien von Flächen, 39
geodätische Krümmung, 73
Krümmung
einer Kurve, 21
Gaussche, 66, 67, 71
geodätische, 59, 72
einer Fläche, 59
innergeometrische Grösse, 91
Gesamtkrümmung, 96, 97
Hauptkrümmung, 62
Mittlere, 66, 67
Normalkrümmung einer Fläche, 59
Krümmung einer Kurve, 28
Krümmungsmittelpunkt, 33
Krümmungstheorie, 59
Krümmungsvektor einer Kurve, 59
Kreis
begleitendes Dreibein, 23
Bogenlänge, 19
Krümmung, 29
zulässige Parametrisierung, 17
Kreuzprodukt im euklidischen Raum $\mathbf{R}^3$, 11
Krummung
Gaussche
bei geodatischer Polarkoordinaten, 101
Krummungslinien
Parametrisiserung durch -, 102
Kugel
Gaussche Parametrisierung, 44
Geschlecht, 99
Hauptkrümmung, 65
Volumen einer Hohl-, 111
zulässige Parametrisierung, 41
Kurve, 13, 17
rektifizierbare, 19
kurzeste Verbindung zweier Flachenpunkte, 77

Lagrangesche Identität, 12
Linkssystem, 11

Möbius-Band, 97
Mainardi
Gleichungen von - /Codazzi, 91
metrische Fundamentalgrösse
erste, 54, 55
zweite, 59, 61
Minimalfläche, 81
Mittlere Krümmung, 66, 67

Nabelpunkt, 63
natürlicher Parameter, 19
Neitsche Parabel, 32
Norm im euklidischen Raum $\mathbf{R}^3$, 10

Normalebene, 30, 31
Normalenvektor einer Fläche, 42
Normalkrümmung, 59
 einer Fläche, 59
 Problem der extremalen Normalkrümmung, 62

Oberflächenelement, 54
Oberflächeninhalt aus 1. metrischer Fundamentalgrösse, 57
orientierbar, 97

Parabel
 begleitendes Dreibein, 24, 25
 Neitsche, 32
parabolischer Punkt, 67
Paraboloid
 hyperbolisches, 45
  Hauptkrümmung, 65
Parameter
 natürlicher, 19
Parameterdarstellung (zulässige)
 einer Fläche, 40
 einer Kurve, 17
Parametertransformation, 18, 43
Parametrisierung, 100
 Gaussche, 43
partielle Ableitung
 einer Vektorfunktion dreier Parameter, 14
 einer Vektorfunktion zweier Parameter, 14
 eines Vektorfeldes, 14
Polarkoordinaten
 geodatische, 100
Projektion, 31

Röhrenfläche, 52
Rayleigh-Quotient, 63
 Wertebereich, 63
Rechtssystem, 11
Regelfläche, 45
rektifizierbare Kurve, 19
Rotationsfläche, 44
 geodätische Linie, 79
 geodatische Krümmung, 74
 Minimalfläche, 85
Rotationshyperboloid, 49

Saint Venant, 36
Satz
 Hauptsatz der Kurventheorie, 27
 Integralsatz von Gauss und Bonnet, 96, 97
 von Saint Venant, 36
 Wurzelsatz von Vieta, 66
Schmiegeebene, 30, 31
Schnittwinkel
 von Teilkurven aus 1. metrischer Fundamentalgrösse, 56
Schraubenlinie, 84
 begleitendes Dreibein, 24
 Bogenlänge, 20
 Krümmung, 29
 Windung, 29
 zulässige Parametrisierung, 18
singulärer Punkt einer Fläche, 41
Skalarprodukt im euklidischen Raum $\mathbf{R}^3$, 10
Spatprodukt im euklidischen Raum $\mathbf{R}^3$, 11
Streckebene, 30, 31
Summenkonvention (Einsteinsche), 40
System
 Linkssystem, 11
 Rechtssystem, 11

Tangentenfläche, 45, 51, 87
Tangentialebene einer Fläche, 42
Tangentialvektor
 einer Fläche, 39
 einer Kurve, 21, 22
Torse, 45, 52, 87
Torsion, 26
Torus, 52
 Geschlecht, 100
 Klasseneinteilung der Flächenpunkte, 67
 Oberflächeninhalt, 58
 zulässige Parametrisierung, 53

Vektorfeld, 14
Vektorfunktion
 dreier Parameter, 14
 eines Parameters, 13
 zweier Parameter, 14
Vektorraum, 9
Venant, Saint, 36
Verbiegbarkeit, 87
Vieta, 66
Volumen einer Hohlkugel, 111
Volumen eines Hohlzylinders, 110

Weingarten, 69, 71
Wendelfläche, 84
 verbiegbar in die Katenoide, 88
Windung, 26, 28
Wurzelsatz von Vieta, 66

zulässige Parameterdarstellung
 einer Fläche, 40
 einer Kurve, 17
zweite metrische Fundamentalgrösse, 59, 61
Zylinder, 87
 -fläche, 51
 elliptischer, 64
 Gaussche Parametrisierung, 44
 geodätische Linien, 76
 Hauptkrümmung, 64
 Volumen eines Hohl-, 110
 zulässige Parametrisierung, 41