Функциональный анализ и его приложения,
1984, т. 18, вып. 2, 55—56.

УДК 517.9

МЕТОД РЕДУКЦИИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВИНЕРА — ХОПФА С КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫМ СИМВОЛОМ В ПРОСТРАНСТВАХ L^p

А. Беттхер

Вопрос применимости метода редукции к дискретным или интегральным операторам Винера — Хопфа с кусочно-непрерывным символом в пространстве l^2 или L^2 был решен в [1]. Есть также критерий для дискретных операторов в пространстве l^p, $1 < p < \infty$ [2—4]: при некоторых дополнительных условиях на символ метод редукции применим тогда и только тогда, когда и оператор и к нему транспонированный обратим в l^p или, что то же самое, тогда и только тогда, когда оператор обратим во всех пространствах l^r, $r \in [p, q]$, $1/p + 1/q = 1$. В этой заметке изучается метод редукции по некоторой системе проекторов $\{P_\tau\}_{\tau>0}$ для интегральных операторов Винера — Хопфа с кусочно-непрерывным символом. Оказывается, что названный выше критерий во второй формулировке переносится на этот случай. Отметим, однако, что он для интегральных операторов не остается верным в первой формулировке: дело в том, что в отличие от дискретного случая из обратимости интегрального оператора Винера — Хопфа с кусочно-непрерывным символом в пространствах L^p и L^q, вообще говоря, не вытекает обратимость в L^r, где $r \in [p, q]$.

Пусть F преобразование Фурье в $L^2(\mathbf{R})$ и a — функция из $L^\infty(\mathbf{R})$. Если $\|F^{-1}a \times F\varphi\|_p \leqq M\|\varphi\|_p$ для всех $\varphi \in L^p(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ с некоторой не зависящей от φ константой M, то оператор $F^{-1}aF$ имеет единственное непрерывное продолжение, обозначаемое через $W^0(a)$, на пространство $L^p(\mathbf{R})$. В этом случае интегральный оператор Винера — Хопфа $W(a)$ с символом a в пространстве $L^p(\mathbf{R}_+)$ определяется формулой

$$W(a)\varphi = PW^0(a)\varphi, \quad \varphi \in L^p(\mathbf{R}_+),$$

где проектор $P\colon L^p(\mathbf{R}) \to L^p(\mathbf{R}_+)$ действует по правилу $(P\psi)(x) = (^1/_2 + {}^1/_2\cdot\operatorname{sgn} x)\,\psi(x)$. Заметим, что если $a = c + Fk$, $c \in \mathbf{C}$, $k \in L^1(\mathbf{R})$ (и, следовательно, a — непрерывная функция), то оператор $W(a)$ ограничен во всех пространствах $L^p(\mathbf{R}_+)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ и имеет вид

$$(W(a)\varphi)(x) = c\varphi(x) + \int_0^\infty k(x-t)\varphi(t)\,dt \qquad (x > 0).$$

Сингулярный интегральный оператор S_+ на $\mathbf{R}_+$,

$$(S_+\varphi)(x) = \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\varphi(t)\,dt}{x-t}\,(x>0),$$

является простейшим примером интегрального оператора Винера — Хопфа с кусочно-непрерывным символом: имеем $S_+ = W(-\operatorname{sgn} t)$. Оператор S_+ ограничен в $L^p(\mathbf{R}_+)$ $(1 < p < \infty)$. Он обратим в $L^p(\mathbf{R}_+)$ $(1 < p < \infty)$ тогда и только тогда, когда $p \neq 2$ (ср. [5, 6]).

Определим в пространстве $L^p(\mathbf{R}_+)$ $(1 < p < \infty)$ семейство проекторов $\{P_\tau\}_{\tau>0}$ равенством

$$(P_\tau\psi)(x) = \begin{cases}\psi(x), & 0 < x < \tau,\\ 0 & x > \tau.\end{cases}$$

Будем говорить, что к ограниченному оператору $W(a)$ применим метод редукции в $L^p(\mathbf{R}_+)$, если при $\tau \geqq \tau_0$ операторы $W_\tau(a) := P_\tau W(a) P_\tau | \operatorname{Im} P_\tau$ обратимы и $\sup_{\tau\geqq\tau_0} \|W_\tau^{-1}(a) \times |\operatorname{Im} P_\tau\| < \infty$. Множество операторов, к которым применим метод редукции в пространстве $L^p(\mathbf{R}_+)$, обозначим через $\Pi_p\{P_\tau\}$.

Т е о р е м а 1.' *Пусть* $a \in L^\infty(\mathbf{R})$ *и оператор* $W(a)$ *ограничен в* $L^p(\mathbf{R}_+)$ $(1 < p < \infty)$. *Тогда, если* $W(a) \in \Pi_p\{P_\tau\}$, *то* $W(a) \in \Pi_r\{P_\tau\}$ *для всех* $r \in [p, q]$, $1/p + 1/q = 1$, *и, следовательно,* $W(a)$ *обратим в* $L^r(\mathbf{R}_+)$, $r \in [p, q]$.

Доказательство опирается на соотношение $W_\tau^*(a) = Q_\tau W_\tau(a) Q_\tau$, где $(Q_\tau(\psi))(x) := \overline{\psi(\tau - x)}$ $(0 < x < \tau)$, $\psi \in L^q(0, \tau)$ и на интерполяционную теорему Рисса —Торина.

Теорема 2. *Пусть a — ограниченная, кусочно-непрерывная функция на* $\mathbf{R}$. *В случае $p \neq 2$ предполагаем, что оператор $W(a)$ ограничен в $L^s(\mathbf{R}_+)$ для всех s из некоторой окрестности значения p $(1 < p < \infty)$. Тогда если $W(a)$ обратим в $L^r(\mathbf{R}_+)$ для всех $r \in [p, q]$, $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, то $W(a) \in \Pi_p\{P_\tau\}$.*

Доказательство получается переносом локального принципа из [4] на континуальный случай. Отметим, что локальный представитель имеет символ вида $b - c \cdot \operatorname{sgn}(t - x)$, $x \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{C}$, $c \in \mathbf{C}$, и что применимость метода редукции к нему можно изучать исходя из представления

$$W_\tau(-\operatorname{sgn} t) = \mu^{-1} W [\coth \pi (i/p + t)] \mu,$$

где μ — изометрия $(\mu\varphi)(z) = \tau^{1/p} e^{-z/p} \exp(-ix\tau e^{-z}) \varphi(\tau e^{-z})$ пространства $L^p(0, \tau)$ на $L^p(\mathbf{R}_+)$, и применяя результаты из [5, 6].

Изучен также и случай матричных символов.

Автор благодарен Б. Зильберманну и В. Б. Дыбину за полезное обсуждение.

ЦИТИРУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.— М.: Наука, 1971. 2. *Вербицкий И. Э., Крупник Н. Я.*— Матем. иссл., Кишинев, 1977, вып. 45, с. 17—28. 3. *Böttcher A., Silbermann B.*— Zeitschr. für Analysis und Anw., 1982, Jg 1, H2, S. 1—5. 4. *Silbermann B.*—Math. Nachr., 1981, Bd. 104, S. 137—146. 5. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов.— Кишинев: Штиинца, 1973. 6. *Duduchava R. V.* Integral equations with fixed singularities. Leipzig: TEUBNER, 1979.

Ростовский государственный
университет

Поступило в редакцию
20 апреля 1982 г.