МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 34, № 2, (1983)

ДВУМЕРНЫЕ СВЕРТКИ В УГЛАХ С ЯДРАМИ, ИМЕЮЩИМИ НОСИТЕЛЬ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

А. Бёттхер

1. Постановка задачи. Углом в $\mathbf{R}^2$ будем называть такое (открытое или замкнутое) множество в $\mathbf{R}^2$, которое вместе с каждой своей точкой содержит также и луч, соединяющий начало координат с этой точкой. Множество $M \subset \mathbf{Z}^2$ вида $M = K \cap \mathbf{Z}^2$, где K — угол в $\mathbf{R}^2$, будем называть углом в $\mathbf{Z}^2$.

Через $\mathscr{W}(\mathbf{T}^2)$ обозначим алгебру всех определенных на торе $\mathbf{T}^2$, $\mathbf{T} = \{\zeta \in \mathbf{C}^1 : |\zeta| = 1\}$, функций $\hat{a}(\xi, \eta)$, разлагающихся в абсолютно сходящиеся ряды Фурье

$$\hat{a}(\xi, \eta) = \sum\nolimits_{(i,j) \in \mathbf{Z}^2} a_{ij} \xi^i \eta^j,$$
$$\sum\nolimits_{(i,j) \in \mathbf{Z}^2} |a_{ij}| < \infty, \quad (\xi, \eta) \in \mathbf{T}^2, \tag{1}$$

а через $\mathscr{W}(\mathbf{R}^2)$ — алгебру всех определенных на $\mathbf{R}^2$ функций $\hat{c}(\xi, \eta)$, допускающих представление

$$\hat{c}(\xi, \eta) = 1 - \iint_{\mathbf{R}^2} c(x, y) e^{i\xi x} e^{i\eta y} \, dx \, dy, \quad (\xi, \eta) \in \mathbf{R}^2, \tag{2}$$

где $c \in L_1(\mathbf{R}^2)$. Если M (соответственно K) — угол в $\mathbf{Z}^2$ (соответственно $\mathbf{R}^2$), то рассмотрим в пространстве $l_p(M)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ двумерный дискретный оператор Винера — Хопфа $W_M(\hat{a})$, действующий по правилу

$$\{W_M(\hat{a}) \varphi\}_{ij} = \sum\nolimits_{(k,l) \in M} a_{i-k, j-l} \varphi_{kl}, \quad (i, j) \in M, \tag{3}$$

и в пространстве $L_p(K)$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ — двумерный интегральный оператор Винера — Хопфа $W_K(\hat{c})$, определенный формулой

$$[W_K(\hat{c})\,\varphi](x, y) = \varphi(x, y) - \iint_K c(x-t, y-s)\,\varphi(t, s)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s, \quad (x, y) \in K. \tag{4}$$

Известны следующие критерии нётеровости операторов (3), (4), принадлежащие И. Б. Симоненко [1, 2]. Если K — угол в $\mathbf{R}^2$ и $M = K \cap \mathbf{Z}^2$, то $W_M(\hat{a})$ нётеров в $l_p(M)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ тогда и только тогда, когда $\hat{a}(\xi, \eta) \neq 0$ $(|\xi| = |\eta| = 1)$, если $K = \mathbf{R}^2$; когда $\hat{a}(\xi, \eta) \neq 0$ $(|\xi| = |\eta| = 1)$, $(\varkappa_1, \varkappa_2) \in \partial M$, где $\varkappa_1 = \operatorname{ind} \hat{a}(\xi, 1)$, $\varkappa_2 = \operatorname{ind} \hat{a}(1, \eta)$, если K — полуплоскость, ∂K — ее граница и $\partial M = \partial K \cap \mathbf{Z}^2$; $\hat{a}(\xi, \eta) \neq 0$ $(|\xi| = |\eta| = 1)$, $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$ в остальных случаях. Оператор $W_K(\hat{c})$, в свою очередь, нётеров в $L_p(K)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ тогда и только тогда, когда $\hat{c}(\xi, \eta) \neq 0$ для всех $(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^2$.

Отметим, что в случае, когда K — плоскость или полуплоскость, нётеровость операторов (3), (4) совпадает с обратимостью. Поэтому в дальнейшем рассмотрим только случай, когда K не является ни плоскостью, ни полуплоскостью. Тогда нётеровость операторов (3), (4) влечет за собой равенство нулю их индексов (см. [1—4]). Однако вопрос обратимости является более сложным. В ряде работ (см. [3] и [4, 5]) были выделены некоторые классы операторов, для которых из нётеровости следует обратимость.

Отметим, что результаты этих работ в первую очередь относятся к дискретному оператору (3), где M — первый квадрант в $\mathbf{Z}^2$.

Для $(\gamma_1, \gamma_2) \neq (0, 0)$ положим $\Pi_{\gamma_1, \gamma_2} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: \gamma_1 x + \gamma_2 y \geqq 0\}$. В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия обратимости операторов (3) и (4), если M и K — углы в $\mathbf{Z}^2$ и $\mathbf{R}^2$ соответственно и если существуют $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbf{R}$ такие, что носитель $\operatorname{supp} a$ последовательности $\{a_{ij}\}$ (соответственно носитель $\operatorname{supp} c$ функции $c(x, y)$) лежит в Π_{γ_1, γ_2}.

Заметим, что нижеследующая теорема 2 в случае, когда M — первый квадрант и прямая $\gamma_1 i + \gamma_2 j = 0$ — биссектриса второго и четвертого квадранта сообщена автору А. Э. Пасенчуком.

2. Вспомогательные предложения. Пусть для $\hat{a} \in \mathscr{W}(\mathbf{T}^2)$ справедливо $\operatorname{supp} a \subset \Pi_{\gamma_1, \gamma_2}$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbf{Z}^2$, н.о.д. $(\gamma_1, \gamma_2) = 1$ (полагаем $\gamma_i = 1$, если $\gamma_j = 0$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$). Предположим далее, что M — угол в $\mathbf{Z}^2$, обладающий следующими свойствами: (а) $M \subset \Pi_{\gamma_1, \gamma_2}$; (б) каждая прямая $\gamma_1 i + \gamma_2 j = k$, где $k \geqq 0$ — целое число, пересекается с M только в конечном числе точек. Положим $H_k = \{\varphi \in l_p(M)\colon \ \varphi_{ij} = 0$, если $\gamma_1 i + \gamma_2 j \neq k\}$ $(k \geqq 0)$ (отметим, что $H_k = \{0\}$ не исключается). В силу условия н.о.д. $(\gamma_1, \gamma_2) = 1$ $l_p(M) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H_k$ и вследствие (б) $\dim H_k < \infty$. Далее, имеем

$$\hat{a}(\xi, \eta) = \sum_{\gamma_1 i + \gamma_2 j \geqq 0} a_{ij} \xi^i \eta^i = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{b}_n(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \mathbf{T}^2, \tag{5}$$

$$\hat{b}_n(\xi, \eta) = \sum_{\gamma_1 i + \gamma_2 j = n} a_{ij} \xi^i \eta^j. \tag{6}$$

Пусть $f = W_M(\hat{a})\varphi$, $\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k$, $\varphi_k \in H_k$. Из $W_M(\hat{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} W_M(\hat{b}_n)$ следует $f = \sum_{n,\, k=0}^{\infty} W_M(\hat{b}_n)\varphi_k$. Простые вычисления показывают, что $W_M(\hat{b}_n)$ отображает H_k в H_{k+n}. Следовательно, представляя f в виде $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$, $f_k \in H_k$, получаем

$$f_k = W_M(\hat{b}_k)\varphi_0 + W_M(\hat{b}_{k-1})\varphi_1 + \ldots + W_M(\hat{b}_0)\varphi_k \quad (k \geqq 0),$$

т. е. представление пространства $l_p(M)$ в виде $\bigoplus_{k=0}^{\infty} H_k$ индуцирует следующее треугольное представление оператора $W_M(\hat{a})$:

$$\begin{pmatrix} W_M(\hat{b}_0) & & \\ W_M(\hat{b}_1) & W_M(\hat{b}_0) & \\ W_M(\hat{b}_2) & W_M(\hat{b}_1) & W_M(\hat{b}_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Отметим, что для оператора $W_M(\hat{b}_0)$ в представлении (7) следует положить $W_M(\hat{b}_j) = 0$, $j > 0$, и, следовательно, оно будет диагональным. Далее, легко можно убедиться в том, что оператор $W_M(\hat{b}_0)$ в пространстве H_k (в подходящем базисе) действует как конечная теплицева матрица $\{\sigma_{i-j}\}_{i,\, j=0}^{n}$, производящей функцией которой является функция (здесь $\gamma_1\delta_1 + \gamma_2\delta_2 = 1$)

$$\sigma(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma_n t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{\gamma_2 n, -\gamma_1 n} t^n = \hat{b}_0 (t^{\delta_2}, t^{-\delta_1}), \qquad t \in \mathbf{T}. \tag{8}$$

ЛЕММА 1. *Пусть* $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbf{Z}$, *н.о.д.* $(\gamma_1, \gamma_2) = 1$, $\operatorname{supp} a \subset \Pi_{\gamma_1\gamma_2}$ *и выполнены условия* (а) *и* (б): *Тогда в обозначениях* (5) *и* (6) *имеет место*

$$W_M(\hat{a}) \text{ обратим} \Rightarrow \operatorname{Ker} W_M(\hat{b}_0) = \{0\},$$
$$\operatorname{Ker} W_M(\hat{b}_0) = \{0\} \Rightarrow \operatorname{Ker} W_M(\hat{a}) = \{0\}.$$

Доказательство очевидным образом получается из представления (7).

ЛЕММА 2. *Пусть* $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbf{R}$, $\hat{a} \in \mathcal{W}(\mathbf{T}^2)$, $\operatorname{supp} a \subset \Pi_{\gamma_1\gamma_2}$. *Полагаем* $\hat{b}_0(\xi, \eta) = \Sigma_{\gamma_1 i + \gamma_2 j = 0} a_{ij} \xi^i \eta^j$ $(\hat{b}_0(\xi, \eta) \equiv a_{00}$ *в случае иррационального наклона прямой* $\gamma_1 i + \gamma_2 j = 0)$. *Тогда*

$$\hat{a}(\xi, \eta) \neq 0 \quad (|\xi| = |\eta| = 1),$$
$$\operatorname{ind} \hat{a}(\xi, 1) = \operatorname{ind} \hat{a}(1, \eta) = 0$$

влечет за собой

$$\hat{b}_0(\xi, \eta) \neq 0 \quad (|\xi| = |\eta| = 1),$$
$$\operatorname{ind} \hat{b}_0(\xi, 1) = \operatorname{ind} \hat{b}_0(1, \eta) = 0.$$

Доказательство. Если $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbf{Z}$, н.о.д. $(\gamma_1, \gamma_2) = 1$, то, используя обозначения (5), (6), полагаем для $|\mu| \leq 1$

$$g_\mu(\xi, \eta) = \hat{b}_0(\xi, \eta) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \hat{b}_n(\xi, \eta), \qquad (\xi, \eta) \in \mathbf{T}^2.$$

Для $|\mu| = 1$ имеем $g_\mu(\xi, \eta) = \hat{a}(\mu^{\gamma_1}\xi, \mu^{\gamma_2}\eta)$, откуда согласно предположению вытекает, что $g_\mu(\xi, \eta) \neq 0$ $(|\xi| = |\eta| = 1, \ |\mu| = 1)$ и при фиксированном $(\xi, \eta) \in \mathbf{T}^2$

$$\operatorname*{ind}_{|\mu|=1} g_\mu(\xi, \eta) = \operatorname{ind} \hat{a}(\xi, 1) \cdot \gamma_1 + \operatorname{ind} \hat{a}(1, \eta) \cdot \gamma_2 = 0$$

(см. [2]).

Следовательно, $g_\mu(\xi, \eta) \neq 0$ $(|\xi| = |\eta| = 1, \ |\mu| \leq 1)$. Итак, семейство $g_\mu(\xi, \eta)$ $(1 \geq \mu \geq 0)$ гомотопирует $\hat{a}(\xi, \eta) = g_1(\xi, \eta)$ к $\hat{b}_0(\xi, \eta) = g_0(\xi, \eta)$ через функции, не обращающиеся в нуль на $\mathbf{T}^2$, и отсюда следует утверждение.

Если прямая $\gamma_1 i + \gamma_2 j = 0$ имеет иррациональный наклон, то полагаем $\hat{a}(\xi, \eta) = \hat{a}_1(\xi, \eta) + \hat{a}_2(\xi, \eta)$, где

$$\operatorname{supp} a_1 \subset \\ \subset \{(i, j) \in \mathbf{Z}^2 \colon \ \gamma_1 i + \gamma_2 j \geqq 0, \ |i|^2 + |j|^2 \leqq r^2\},$$

$$\operatorname{supp} a_2 \subset \\ \subset \{(i, j) \in \mathbf{Z}^2 \colon \ \gamma_1 i + \gamma_2 j \geqq 0, \quad |i|^2 + |j|^2 > r^2\}.$$

Нетрудно доказать, что при достаточно большом r $\hat{a}_1(\xi, \eta) \neq 0$ $(|\xi| = |\eta| = 1)$ и $\max\{|\hat{a}_2(\xi, \eta)/\hat{a}_1(\xi, \eta)| : |\xi| = |\eta| = 1\} < 1$. Но тогда из равенства $\hat{a} = \hat{a}_1(1 + \hat{a}_2/\hat{a}_1)$ следует, что $\operatorname{ind} \hat{a}_1(\xi, 1) = \operatorname{ind} \hat{a}_1(1, \eta) = 0$. Кроме того, существуют такие целые числа δ_1, δ_2, что

$$\hat{a}_1(\xi, \eta) = a_{00} + \sum\nolimits_{\delta_1 i + \delta_2 j > 0} a_{ij} \xi^i \eta^i.$$

Отсюда такими же рассуждениями, как в случае рационального наклона, получаем, что $a_{00} \neq 0$.

Будем рассматривать углы раствора меньшего π, а случай углов раствора большего π сводить к указанному с помощью следующего утверждения [6]: если X — линейное пространство, A — обратимый в X оператор, P — проектор в X и $Q = I - P$, то справедливо

$$PAP \mid \operatorname{Im} P \text{ обратим} \Leftrightarrow QA^{-1}Q \mid \operatorname{Im} Q \text{ обратим}. \tag{9}$$

Отметим также, что множество $\mathcal{W}_{\gamma_1, \gamma_2}(\mathbf{T}^2)$ (соответственно $\mathcal{W}_{\gamma_1, \gamma_2}(\mathbf{R}^2)$) всех $\hat{a} \in \mathcal{W}(\mathbf{T}^2)$ (соответственно $\hat{c} \in \mathcal{W}(\mathbf{R}^2)$), для которых $\operatorname{supp} a \subset \Pi_{\gamma_1, \gamma_2}$ (соответственно $\operatorname{supp} c \subset \Pi_{\gamma_1, \gamma_2}$) образует подалгебру алгебры $\mathcal{W}(\mathbf{T}^2)$ (соответственно $\mathcal{W}(\mathbf{R}^2)$). Эта подалгебра не является наполненной, однако, имеет место следующая

ЛЕММА 3. *Если* $\hat{a} \in \mathcal{W}(\mathbf{T}^2)$, $\hat{a}(\xi, \eta) \neq 0$ $(|\xi| = |\eta| = 1)$, $\operatorname{ind} \hat{a}(\xi, 1) = \operatorname{ind} \hat{a}(1, \eta) = 0$, *то* $\widehat{d} = \hat{a}^{-1} \in \mathcal{W}_{\gamma_1, \gamma_2}(\mathbf{T}^2)$ *и, полагая*

$$\widehat{d_0}(\xi, \eta) = \sum\nolimits_{\gamma_1 i + \gamma_2 j = 0} d_{ij} \xi^i \eta^j,$$

имеем $\widehat{d_0}(\xi, \eta) \cdot \widehat{b_0}(\xi, \eta) = 1$, $(\xi, \eta) \in \mathbf{T}^2$. *Аналогично, если* $\hat{c} \in \mathcal{W}_{\gamma_1, \gamma_2}(\mathbf{R}^2)$, $\hat{c}(\xi, \eta) \neq 0$ *при* $(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^2$, *то* $\hat{e} = \hat{c}^{-1} \in \mathcal{W}_{\gamma_1, \gamma_2}(\mathbf{R}^2)$.

Доказательство. Включения $\widehat{d} \in \mathcal{W}(\mathbf{T}^2)$ и $\hat{e} \in \mathcal{W}(\mathbf{R}^2)$ следуют из теоремы Винера — Леви.

Если прямая $\gamma_1 i + \gamma_2 j = 0$ имеет рациональный наклон, то, определив $g_\mu(\xi, \eta)$, как в доказательстве леммы 2, получаем $g_\mu(\xi, \eta) \neq 0$ ($|\xi| = |\eta| = 1$, $|\mu| \leqq 1$). Пусть $\hat{d}(\xi, \eta)\cdot\hat{a}(\xi, \eta) = 1$ и

$$\hat{d}(\xi, \eta) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{d}_n(\xi, \eta),$$

$$\hat{d}_n(\xi, \eta) = \sum_{\gamma_1 i+\gamma_2 j=n} d_{ij}\xi^i\eta^j, \qquad (\xi, \eta)\in\mathbf{T}^2.$$

При $|\mu| = 1$ имеем $\hat{d}(\mu^{\gamma_1}\xi, \mu^{\gamma_2}\eta) = 1/\hat{a}(\mu^{\gamma_1}\xi, \mu^{\gamma_2}\eta)$. Функция, стоящая в правой части этого равенства, при фиксированных ξ и η аналитична по μ в $D = \{\mu \in \mathbf{C}^1: |\mu| < 1\}$. Но тогда из

$$\hat{d}(\mu^{\gamma_1}\xi, \mu^{\gamma_2}\eta) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \mu^n\hat{d}_n(\xi, \eta)$$

следует $\hat{d}_n(\xi, \eta) = 0$ $(n < 0)$, т. е. $\operatorname{supp} d \in \Pi_{\gamma_1, \gamma_2}$. Полагаем теперь $h_\mu(\xi, \eta) = \hat{d}_0(\xi, \eta) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n\hat{d}_n(\xi, n)$ $(|\xi| = |\eta| = 1,\ |\mu| \leqq 1)$ и имеем $h_\mu(\xi, \eta)\cdot g_\mu(\xi, \eta) = 1$ при $|\mu| = 1$. Учитывая аналитичность функций h_μ и g_μ по μ в D и полагая $\mu = 0$, получаем $\hat{d}_0(\xi, \eta)\cdot\hat{b}_0(\xi, \eta) = 1$.

Пусть теперь наклон прямой $\gamma_1 i + \gamma_2 j = 0$ иррационален. В обозначениях доказательства леммы 2 имеем $\hat{a} = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 = \hat{a}_1(1 + \hat{a}_2/\hat{a}_1)$, значит,

$$\hat{a}^{-1} = \hat{a}_1^{-1}(1 + \hat{a}_2/\hat{a}_1)^{-1} = \hat{a}_1^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\hat{a}_2/\hat{a}_1)^n.$$

Но $\hat{a}_1$ имеет вид $\hat{a}_1(\xi, \eta) = a_{00} + \Sigma_{\delta_1 i+\delta_2 j>0} a_{ij}\xi^i\eta^j$, где $\delta_1, \delta_2 \in \mathbf{Z}$, и в силу только что доказанного отсюда следует $\hat{a}_1^{-1} \in \mathrm{W}_{\gamma_1, \gamma_2}(\mathbf{T}^2)$. Так как $\mathscr{W}_{\gamma_1, \gamma_2}(\mathbf{T}^2)$ является алгеброй, то $(\hat{a}_2/\hat{a}_1)^n \in \mathscr{W}_{\gamma_1, \gamma_2}(\mathbf{T}^2)$. Отсюда, наконец, вытекает, что $\operatorname{supp} d \subset \Pi_{\gamma_1, \gamma_2}$.

Из $\hat{d}(\xi, \eta)\cdot\hat{a}(\xi, \eta) = 1$, в частности, следует $\Sigma d_{ij}a_{kl} = 1$, где суммирование ведется по множеству

$$N = \{(i, j, k, l) \in \mathbf{Z}^4: \gamma_1 i + \gamma_2 j \geqq 0,\ \gamma_1 k + \gamma_2 l \geqq 0,\ i + k = 0,\ j + l = 0\}.$$

Но если прямая $\gamma_1 i + \gamma_2 j = 0$ имеет иррациональный наклон, то, очевидно, $N = \{(0, 0, 0, 0)\}$. Значит, $a_{00}\cdot d_{00} = 1$.

В континуальном случае делаем замену переменных $x = \gamma_1 u - \gamma_2 v$, $y = \gamma_1 v + \gamma_2 u$ (можно предполагать, что

$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1$). Тогда для $g_{+.}(u, v) = c(\gamma_1 u - \gamma_2 v, \gamma_1 v + \gamma_2 u)$ имеем $g_{+.}(u, v) = 0$ $(u < 0)$ и $\hat{g}_{+.}(\xi, \eta) \neq 0$, $(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^2$. Пусть $h_{+.}(\xi, \eta) \cdot \hat{g}_{+.}(\xi, \eta) = 1$. По теореме Винера — Леви $\hat{h}_{+.}(u, v) = 0$ $(u < 0)$, и для функции $e(x, y) = h_{+.}(\gamma_1 x + \gamma_2 y, \gamma_1 y - \gamma_2 x)$ получаем $\hat{e}(\xi, \eta) \cdot \hat{c}(\xi, \eta) = 1$ и $e(x, y) = 0$ при $\gamma_1 x + \gamma_2 y < 0$.

3. Формулировка результатов. Пусть $\hat{a} \in \mathcal{W}(\mathbf{T}^2)$ и $\operatorname{supp} a \subset \Pi_{\gamma_1, \gamma_2}$. Тогда $\hat{a}(\xi, \eta) = \sum_{\gamma_1 i + \gamma_2 j \geq 0} a_{ij} \xi^i \eta^j$ и мы полагаем $\hat{b}_0(\xi, \eta) = \sum_{\gamma_1 i + \gamma_2 j = 0} a_{ij} \xi^i \eta^j$, $(\xi, \eta) \in \mathbf{T}^2$. Пусть далее K — угол в $\mathbf{R}^2$ и $M = K \cap \mathbf{Z}^2$. Полагаем $N = \overline{K}$, если K — угол раствора меньшего π и $N = \overline{\mathbf{R}^2 \setminus K}$, если K — угол раствора большего π.

ТЕОРЕМА 1. *Если прямая $\gamma_1 x + \gamma_2 y = 0$ пересекается с N не только в начале координат, то в $l_p(M)$ $(1 \leq p < \infty)$ для оператора $W_M(\hat{a})$ обратимость совпадает с нётеровостью.*

ТЕОРЕМА 2. *Если прямая $\gamma_1 x + \gamma_2 y = 0$ пересекается с N только в начале координат, то для обратимости в $l_p(M)$ $(1 \leq p < \infty)$ оператора $W_M(\hat{a})$ необходимо и достаточно, чтобы выполнились условия*

(i) *оператор $W_M(\hat{a})$ нётеров в $l_p(M)$,*

(ii) *оператор $W_M(\hat{b}_0)$ обратим в $l_p(M)$.*

Отметим, что условие (ii) в случае иррационального наклона прямой $\gamma_1 x + \gamma_2 y = 0$ является лишним, так как оно в силу леммы 2 следует из (i). В случае рационального наклона его можно заменить условием необращения в нуль некоторого семейства теплицевых определителей. Это немедленно следует из представления (7) оператора $W_M(\hat{b}_0)$. В случае углов раствора меньшего π производящая функция $\sigma(t)$ этого семейства имеет вид (8), а в случае углов раствора большего π — вид $1/\sigma(t)$.

В континуальном случае имеет место следующая

ТЕОРЕМА 3. *Для любого угла K в* $\mathbf{R}^2$ *и для любого $\hat{c} \in \mathcal{W}(\mathbf{R}^2)$, удовлетворяющего условию $\operatorname{supp} c \subset \Pi_{\gamma_1, \gamma_2}$ при некоторых $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbf{R}$, обратимость в $L_p(K)$ $(1 \leq p < \infty)$ оператора $W_K(\hat{c})$ совпадает с нётеровостью.*

4. Доказательство теоремы 1. Пусть, например,

$$M = \{(i, j) \in \mathbf{Z}^2 \colon \alpha_1 i + \alpha_2 j > 0,\ \beta_1 i + \beta_2 j > 0\}.$$

Покажем, что из нётеровости оператора $W_M(\hat{a})$ следует, что $\hat{a}$ допускает факторизацию либо $\hat{a} = \hat{a}_{--}\hat{a}_{-+}\hat{a}_{++}$, либо $\hat{a} = \hat{a}_{--}\hat{a}_{-+}\hat{a}_{++}$, где $\hat{a}_{--}^{\pm 1}, \hat{a}_{-+}^{\pm 1}, \ldots \in \mathscr{W}(\mathbf{T}^2)$ и

$$\operatorname{supp}(\hat{a}_{++}^{\pm 1}) \subset \{(i, j) \in \mathbf{Z}^2 : \alpha_1 i + \alpha_2 j > 0,\ \beta_1 i + \beta_2 j > 0\},$$

$$\operatorname{supp}(\hat{a}_{+-}^{\pm 1}) \subset \{(i, j) \in \mathbf{Z}^2 : \alpha_1 i + \alpha_2 j > 0,\ \beta_1 i + \beta_2 j \leqq 0\},$$

и аналогично для $\hat{a}_{-+}^{\pm 1}, \hat{a}_{--}^{\pm 1}$. Тогда нетрудно видеть, что

$$W_M(\hat{a}) = W_M(\hat{a}_{--})\, W_M(\hat{a}_{\mp\pm})\, W_M(\hat{a}_{++}),$$

следовательно, обратным к оператору $W_M(\hat{a})$ является оператор $W_M(\hat{a}_{++}^{-1})\, W_M(\hat{a}_{\mp\pm}^{-1})\, W_M(\hat{a}_{--}^{-1})$ (см. [7]). Ясно, что существование такой факторизации будет следовать из того, что $\hat{a} = \exp \hat{s}$, где $\hat{s} \in \mathscr{W}_{\gamma_1, \gamma_2}(\mathbf{T}^2)$. Но чтобы доказать, что $\hat{a}$ является экспонентой в банаховой алгебре $\mathscr{W}_{\gamma_1, \gamma_2}(\mathbf{T}^2)$, достаточно доказать, что $\hat{a}$ принадлежит связной компоненте обратимых элементов, содержащей единицу (см. [8]). Для этого, в свою очередь, достаточно показать, что сам $\hat{a}$ обратим в $\mathscr{W}_{\gamma_1, \gamma_2}(\mathbf{T}^2)$ и что его можно в $\mathscr{W}_{\gamma_1, \gamma_2}(\mathbf{T}^2)$ гомотопировать к единице через обратимые элементы. Обратимость элемента $\hat{a}$ в $\mathscr{W}_{\gamma_1, \gamma_2}(\mathbf{T}^2)$ вытекает из леммы 3. Укажем соответствующую гомотопию.

Пусть наклон прямой $\gamma_1 i + \gamma_2 j = 0$ рационален. Определив $g_\mu(\xi, \eta)$, как в доказательстве леммы 2, нетрудно показать, что $g_\mu(\xi, \eta)$ при $1 \geqq \mu \geqq 0$ гомотопирует $\hat{a}(\xi, \eta) = g_1(\xi, \eta)$ к $\hat{b}_0(\xi, \eta) = g_0(\xi, \eta)$ в $\mathscr{W}_{\gamma_1, \gamma_2}(\mathbf{T}^2)$ через обратимые элементы. Согласно (8) полагаем $\sigma(t) = b_0(t^{\delta_2}, t^{-\delta_1})$ $(|t| = 1)$, и если $\sigma_\mu(t)$ $(|t| = 1)$ при $1 \geqq \mu \geqq 0$ гомотопирует $\sigma(t)$ к единице, то легко можно убедиться, что $\tau_\mu(\xi, \eta) = \sigma_\mu(\xi^{\gamma_2}\eta^{-\gamma_1})$ $(|\xi| = |\eta| = 1)$ при $1 \geqq \mu \geqq 0$ гомотопирует $\hat{b}_0(\xi, \eta) = \tau_1(\xi, \eta)$ к $1 = \tau_0(\xi, \eta)$ через обратимые в $\mathscr{W}_{\gamma_1, \gamma_2}(\mathbf{T}^2)$ элементы.

Если прямая $\gamma_1 i + \gamma_2 j = 0$ имеет иррациональный наклон, то рассматриваем разложение $\hat{a} = \hat{a}_1 + \hat{a}_2$, введенное при доказательстве леммы 2. Так как $\hat{a}(\xi, \eta) \neq 0$ $(|\xi| = |\eta| = 1)$, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $|\hat{a}(\xi, \eta)| \geqq \varepsilon > 0$ $(|\xi| = |\eta| = 1)$. При достаточно большом r получаем $|\hat{a}_2(\xi, \eta)| \leqq \|\hat{a}_2\|_{\mathscr{W}} \leqq \frac{\varepsilon}{2}$, следовательно,

$$|\hat{a}_1(\xi, \eta)| \geqq |\hat{a}(\xi, \eta)| - |\hat{a}_2(\xi, \eta)| \geqq \frac{2}{3}\varepsilon\ (|\xi| = |\eta| = 1).$$

Полагаем теперь для $|\xi| = |\eta| = 1$, $0 \leqq \mu \leqq 1$

$$k_\mu(\xi, \eta) = \hat{a}_1(\xi, \eta) + \sum\nolimits_{(i, j) \in \operatorname{supp} a_2} a_{ij} \mu^{\gamma_1 i + \gamma_2 j} \xi^i \eta^j$$

и имеем

$$|k_\mu(\xi, \eta)| \geqq |\hat{a}_1(\xi, \eta)| - \|\hat{a}_2\|_W \geqq \frac{2}{3}\varepsilon - \frac{1}{3}\varepsilon = \frac{1}{3}\varepsilon > 0,$$

т. е. $k_\mu(\xi, \eta)$ при $1 \geqq \mu \geqq 0$ гомотопирует $\hat{a}(\xi, \eta) = k_1(\xi, \eta)$ к $\hat{a}_1(\xi, \eta) = k_0(\xi, \eta)$ через обратимые в $\mathcal{W}_{\gamma_1, \gamma_2}(\mathbf{T}^2)$ функции. Но $\hat{a}_1(\xi, \eta) = a_{00} + \sum_{\delta_1 i + \delta_2 j > 0} a_{ij} \xi^i \eta^j$, где $\delta_1, \delta_2 \in \mathbf{Z}$. Отсюда следует, что

$$\rho_\mu(\xi, \eta) = a_{00} + \sum\nolimits_{\delta_1 i + \delta_2 j > 0} a_{ij} \mu^{\delta_1 i + \delta_2 j} \xi^i \eta^j$$

при $1 \geqq \mu \geqq 0$ гомотопирует $\hat{a}_1(\xi, \eta) = \rho_1(\xi, \eta)$ к $1 \sim a_{00} = \rho_0(\xi, \eta)$ через обратимые в $\mathcal{W}_{\gamma_1, \gamma_2}(\mathbf{T}^2)$ функции.

Если K — угол раствора большего π, то из нётеровости оператора $W_M(\hat{a})$ в силу леммы 3 вытекает обратимость оператора $W_{\mathbf{Z}^2}(\hat{a})$ и $W_{\mathbf{Z}^2}^{-1}(\hat{a}) = W_{\mathbf{Z}^2}(\hat{d})$. Такими же рассуждениями, как и выше, отсюда следует обратимость оператора $W_{M_0}(\hat{d})$, $M_0 = \mathbf{Z}^2 \setminus M$. Принимая во внимание (9), получаем обратимость оператора $W_M(\hat{a})$.

5. **Доказательство теоремы** 2. Доказательству предпошлем следующую лемму.

ЛЕММА 4. *Пусть* $M \subset \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \alpha_1 x + \alpha_2 y \geqq 0, \beta_1 x + \beta_2 y \geqq 0\}$, *и пусть для некоторых* μ, λ $(0 < \mu, \lambda < 1)$

$$\hat{a}_{\mu, \lambda}(\xi, \eta) = \sum\nolimits_{(i, j) \in \mathbf{Z}^2} a_{ij} \mu^{\alpha_1 i + \alpha_2 j} \lambda^{\beta_1 i + \beta_2 j} \xi^i \eta^j \in \mathcal{W}(\mathbf{T}^2).$$

Тогда $\operatorname{Ker} W_M(\hat{a}_{\mu, \lambda}) = \{0\}$ *в* $l_p(M)$ *влечет за собой* $\operatorname{Ker} W_M(\hat{a}) = \{0\}$ *в* $l_p(M)$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$.

Доказательство. Полагаем для $1 \leqq p \leqq \infty$

$$l_p^{\mu, \lambda}(M) = \Big\{\varphi = \{\varphi_{ij}\}_{(i, j) \in M} : \|\varphi\|^p = \sum\nolimits_{(i, j) \in M} |\mu^{\alpha_1 i + \alpha_2 j} \lambda^{\beta_1 i + \beta_2 j} \varphi_{ij}|^p < \infty\Big\}$$

(с обычной модификацией при $p = \infty$) и

$$U : l_p^{\mu, \lambda}(M) \to l_p(M), \ \{\varphi_{ij}\} \mapsto \{\mu^{\alpha_1 i + \alpha_2 j} \lambda^{\beta_1 i + \beta_2 j} \varphi_{ij}\}.$$

Простые вычисления показывают, что $W_M(\hat{a}_{\mu, \lambda}) = U W_M(\hat{a}) U^{-1}$. Пусть $W_M(\hat{a})\varphi = 0$, $0 \neq \varphi \in l_p(M)$. Очевидно, $l_p(M) \subset l_p^{\mu, \lambda}(M)$ при $0 < \lambda, \mu < 1$. Но тогда

$\varphi \in l_p^{\mu, \lambda}(M)$, $0 \neq \psi = U\varphi \in l_p(M)$, и мы получаем

$$W_M(\hat{a}_{\mu,\lambda})\psi = UW_M(\hat{a})U^{-1}U\varphi = UW_M(\hat{a})\varphi = 0,$$

что противоречит предположению $\operatorname{Ker} W_M(\hat{a}_{\mu,\lambda}) = \{0\}$. Значит, $\operatorname{Ker} W_M(\hat{a}) = \{0\}$.

Доказательство теоремы 2. Достаточность. Покажем, что в $l_p(M)$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ справедливо $\operatorname{Ker} W_M(\hat{a}) = \{0\}$, если M — угол раствора меньшего π, и что $\operatorname{Ker} W_{M_0}(\hat{a}^{-1}) = \{0\}$, если раствор угла M больше π, $M_0 = \mathbf{Z}^2 \setminus M$. В силу (9) $\operatorname{Ind} W_M(\hat{a}) = \operatorname{Ind} W_{M_0}(\hat{a}^{-1}) = 0$ $(1 \leqq p < \infty)$, отсюда следует обратимость оператора $W_M(\hat{a})$. Ограничимся также случаем $M \subset \Pi_{\gamma_1, \gamma_2}$ (соответственно $M_0 \subset \Pi_{\gamma_1, \gamma_2}$), так как в противном случае к цели ведет рассмотрение сопряженного оператора.

Итак, пусть $M \subset \Pi_{\gamma_1, \gamma_2}$, $M = K \cap \mathbf{Z}^2$, $K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2\colon \alpha_1 x + \alpha_2 y \geqq 0,\ \beta_1 x + \beta_2 y \geqq 0\}$. Тогда нормальный к прямой $\gamma_1 x + \gamma_2 y = 0$ вектор (γ_1, γ_2) лежит внутри угла, образованного нормальными к прямым

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y = 0, \quad \beta_1 x + \beta_2 y = 0$$

векторами (α_1, α_2), (β_1, β_2). Следовательно, существуют положительные числа ρ и σ такие, что $(\gamma_1, \gamma_2) = \rho(\alpha_1, \alpha_2) + \sigma(\beta_1, \beta_2)$, т. е. $\gamma_1 = \alpha_1\rho + \beta_1\sigma$, $\gamma_2 = \alpha_2\rho + \beta_2\sigma$. Для $0 < t < 1$ полагаем $\mu = t^\rho$ и $\lambda = t^\sigma$. Очевидно, $0 < \mu, \lambda < 1$. Тогда

$$\hat{a}_{\mu,\lambda}(\xi, \eta) = \hat{b}_0(\xi, \eta) + \sum_{\gamma_1 i + \gamma_2 j > 0} a_{ij} t^{\rho(\alpha_1 i + \alpha_2 j)} t^{\sigma(\beta_1 i + \beta_2 j)} \xi^i \eta^j =$$
$$= \hat{b}_0(\xi, \eta) + \sum_{\gamma_1 i + \gamma_2 j > 0} a_{ij} t^{(\alpha_1\rho + \beta_1\sigma) i + (\alpha_2\rho + \beta_2\sigma) j} \xi^i \eta^j =$$
$$= \hat{b}_0(\xi, \eta) + \sum_{\gamma_1 i + \gamma_2 j > 0} a_{ij} t^{\gamma_1 i + \gamma_2 j} \xi^i \eta^j = \hat{b}_0(\xi, \eta) + o(1) \quad (t \to 0),$$

так как

$$\sum_{\gamma_1 i + \gamma_2 j > 0} |a_{ij}|\, t^{\gamma_1 i + \gamma_2 j} \leqq \sum_{\gamma_1 i + \gamma_2 j > 1/N} |a_{ij}|\, t^{1/N} + \sum_{0 < \gamma_1 i + \gamma_2 j < 1/N} |a_{ij}|,$$

а второе слагаемое меньше $\varepsilon/2$ при $N > N(\varepsilon)$, и при этом N первое слагаемое меньше $\varepsilon/2$ при $t < t(\varepsilon)$.

В силу (ii) $W_M(\hat{b}_0)$ обратим, значит, обратим и $W_M(\hat{a}_{\mu,\lambda})$ $(\mu = t^\rho, \lambda = t^\sigma)$ при достаточно малом t. Применяя лемму 4, получаем $\operatorname{Ker} W_M(\hat{a}) = \{0\}$. С другой стороны, если K — угол раствора большего π, $M_0 = \mathbf{Z}^2 \setminus M$,

$M_0 \subset \Pi_{\gamma_1, \gamma_2}$ и выполнены условия (i), (ii), то, применяя леммы 4, заменив там M на M_0 и $\hat{a}$ на $\hat{a}^{-1}$, таким же образом можно доказать, что $\operatorname{Ker} W_{M_0}(\hat{a}^{-1}) = \{0\}$.

Необходимость. В случае иррационального наклона необходимость условий очевидна, так как из (i) вследствие леммы 2 вытекает (ii). Итак, пусть $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbf{Z}$, н.о.д. $(\gamma_1, \gamma_2) = 1$, $M = K \cap \mathbf{Z}^2$, K — угол раствора меньшего π, и пусть для определенности $M \subset \Pi_{\gamma_1, \gamma_2}$. Тогда согласно лемме 1 $\operatorname{Ker} W_M(\hat{b}_0) = \{0\}$ в $l_p(M)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, а из леммы 2 следует, что $W_M(\hat{b}_0)$ нётеров. Отсюда получаем обратимость оператора $W_M(\hat{b}_0)$ $(1 \leq p < \infty)$.

Если K — угол раствора большего π, $M_0 = \mathbf{Z}^2 \setminus M$, $M_0 \subset \Pi_{\gamma_1, \gamma_2}$, то, применяя лемму 3 и (9), получаем, что $W_{M_0}(\hat{d})$ обратим, откуда в силу леммы 1 следует $\operatorname{Ker} W_{M_0}(\hat{d}_0) = \{0\}$. Но из леммы 2 вытекает нётеровость оператора $W_{M_0}(\hat{d}_0)$, так что он даже обратим. Опять принимая во внимание лемму 3 и (9), получаем обратимость оператора $W_M(\hat{b}_0)$.

6. Доказательство теоремы 3. Пусть $K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2\colon \alpha_1 x + \alpha_2 y \geq 0,\ \beta_1 x + \beta_2 y \geq 0\}$ — угол раствора меньшего π. Если прямая $\gamma_1 x + \gamma_2 x = 0$ пересекается с $\overline{K}$ не только в начале координат, то делаем замену переменных, как при доказательстве леммы 3, после которого $\hat{c}$ переходит в «$+\cdot$»-символ $\hat{g}_{+\cdot}(\xi, \eta)$, $\hat{g}_{+\cdot}(\xi, \eta) \neq 0$, $(\xi, \eta) \in R^2$, и, следовательно $\hat{g}_{+\cdot} = \exp \hat{s}_{+\cdot}$ по теореме Винера — Леви. Обратная замена переменных ведет к $\hat{c} = \exp \hat{s}$, $\hat{s} \in \mathscr{W}_{\gamma_1, \gamma_2}(\mathbf{R}^2)$.

Континуальным аналогом леммы 4 является следующая лемма, доказательство которой аналогично доказательству леммы 4.

ЛЕММА 5. *Если* $c(x, y) \in L_1(\mathbf{R}^2)$ *и для некоторых* $\mu > 0, \lambda > 0$

$$c_{\mu, \lambda}(x, y) = c(x, y)\, e^{-(\alpha_1\mu+\beta_1\lambda)x} e^{-(\alpha_2\mu+\beta_2\lambda)y} \in L_1(\mathbf{R}^2),$$

то из $\operatorname{Ker} W_K(\hat{c}_{\mu, \lambda}) = \{0\}$ *в* $L_p(K)$ *вытекает, что* $\operatorname{Ker} W_K(\hat{c}) = \{0\}$ *в* $L_p(K)$ $(1 \leq p \leq \infty)$.

Предполагаем теперь, что $K \subset \Pi_{\gamma_1, \gamma_2}$ (иначе рассмотрим сопряженный оператор). Как при доказательстве достаточности в теореме 2, найдем числа $\rho > 0$, $\sigma > 0$ такие, что $\alpha_1\rho + \beta_1\sigma = \gamma_1$, $\alpha_2\rho + \beta_2\sigma = \gamma_2$. Полагая $\mu =$

$= \rho t > 0,\ \lambda = \sigma t > 0\ (t > 0)$, имеем

$$\alpha_1\mu + \beta_1\lambda = \gamma_1 t, \quad \alpha_2\mu + \beta_2\lambda_2 = \gamma_2 t.$$

Но тогда

$$\| I - W_K(\hat{c}_{\mu,\lambda}) \|_{L_p(K)\to L_p(K)} \leqslant \iint_K | c_{\mu,\lambda}(x, y) | \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_{\gamma_1 x + \gamma_2 y > 0} | c(x, y) | \, e^{-(\alpha_1\mu+\beta_1\lambda)x} e^{-(\alpha_2\mu+\beta_2\lambda)y} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_{\gamma_1 x + \gamma_2 y > 0} | c(x, y) | \, e^{-(\gamma_1 x + \gamma_2 y)t} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = o(1) \qquad (t \to \infty).$$

Значит, $W_K(\hat{c}_{\mu,\lambda})$ $(\mu = \rho t,\ \lambda = \sigma t)$ обратим при достаточно большом t и, применяя лемму 5, получаем $\operatorname{Ker} W_K(\hat{c}) = \{0\}$. В силу $\operatorname{Ind} W_K(\hat{c}) = 0$ это влечет за собой обратимость оператора $W_K(\hat{c})$. Наконец, учитывая лемму 3 и (9), получаем справедливость утверждения и в том случае, когда K — угол раствора большего π.

Автор приносит глубокую благодарность В. Б. Дыбину за руководство работой.

Научно-исследовательский институт
механики и прикладной математики
Ростовского государственного
университета

Поступило
31.VII.1981

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Симоненко И. Б., Операторы типа свертки в конусах, Матем. сб., 74, № 2 (1967), 298—313.

[2] Симоненко И. Б., О многомерных дискретных свертках, Матем. иссл. 3, № 1 (1968), Кишинев, 108—122.

[3] Douglas R. G., Howe R., On the C^*-algebra of Toeplitz operators on the quarter-plane, Trans. Amer. Math. Soc., 158, № 1 (1971), 203—217.

[4] Малышев В. А., Уравнения Винера — Хопфа и их применение в теории вероятностей. Сер. Теория вероятностей математическая статистика, теоретическая кибернетика, 13, М., 1976, 5—36.

[5] Meister E., Speck F. O., Some multidimensional Wiener — Hopf equations with applications, Second symposium of frends in applications of pure mathematics to mechanics, Kozubnik, Poland, 1977, 217—262.

[6] Козак А. В., Симоненко И. Б. Проекционные методы решения многомерных дискретных уравнений в свертках, Сиб. матем. ж., 21, № 2 (1980), 119—127.

[7] Рабинович В. С., Многомерное уравнение Винера — Хопфа для конусов, Сб., Теор. функций, функ. анализ и их прилож., Харьков, 5 (1967), 59—67.

[8] Douglas R. G., Banach algebra techniques in operator theory, N. Y., Academic Press, 1972.