13. VL PWT

Notiztitel 1/25/2011

- Präzisierung: Arbeitswerte λ

- $\bar{\lambda} :=$ Zeilenvektor Arbeitswerte

- Vertikale Integration: $\bar{I} + \bar{A} + \bar{A}^2 + \bar{A}^3 + \dots \Big\} (\bar{I} - A)^{-1}$

- $\bar{\lambda} = \bar{l}\,\bar{I} + \bar{l}\,\bar{A} + \bar{l}\,\bar{A}^2 + \bar{l}\,\bar{A}^3 + \dots$

$$= \underbrace{\bar{l}\,(\bar{I} - \bar{A})^{-1}}_{}$$

gesamte vertikal integrierter Arbeitsaufwand für die n Waren

- Subsistenzlohn: Konsumgüterbündel zur Reproduktion der Arbeitskraft

- Notwendige Arbeitszeit: AW des Lohngüterkorbes

- Lohngüterkorb c mit $c_i \left[\frac{M_i}{MJ}\right]$, $c_i \geq 0$

- Integrieren in die Analyse: $\bar{c}$

- Wann wird die gesamte Arbeitskraft genau reproduziert (ohne Akkumulation)?

- Wenn der AW von $\bar{c}$ = 1 ist!

- Verbal: 1 Einheit Arbeitskraft benötigt, um Konsumgüter herzustellen, die den Einsatz von 1 Einheit Arbeitskraft ermöglichen

- Formal: $$\underbrace{\bar{l}\,\underbrace{(\bar{I}-\bar{A})^{-1}\,\bar{c}}_{*}}_{**} = 1 \qquad (3.3.1.1)$$

* Benötigter Bruttooutput, damit $\bar{c}$ netto zur Verfügung steht

** Direkter Arbeitsaufwand von *

- (3.3.1.1): gesamtes Nettoprodukt wird benötigt, um eingesetzte Arbeitskraft zu reproduzieren

- Marx: notwendige Arbeitszeit

- Falls (3.3.1.1) gilt: „stationäres System"

- Marx: „einfache Reproduktion" (kein Wachstum, kein Aufbau des Kapitalstocks)

- Akkumulation nur möglich, wenn:

$$\bar{l}\,(\bar{I}-\bar{A})^{-1}\,\bar{c} < 1 \qquad (3.3.2.2)$$

- Marx: „Reproduktion auf erweiterter Stufenleiter", kurz: erweiterte Reproduktion

- VGR: „Mackenroth - Theorem"

- geschlossene Koeffizientenmatrix: $(n+1)\times(n+1)$-Matrix $\bar{A}^{(+)}$

$$\bar{A}^{(+)} = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{c} \\ \bar{l} & 0 \end{pmatrix}$$

- Einfache Reproduktion?

$$\bar{A}^{(+)}\,\bar{x}^{(+)} = \bar{x}^{(+)} \quad \left[\bar{A}\bar{x} = \bar{x}\right] \qquad (3.3.2.3)$$

mit $\bar{x}^{(+)} = \begin{pmatrix} (\bar{I} - \bar{A})^{-1} \bar{c} \\ 1 \end{pmatrix}$

- Ausschreiben:

1. Schritt

$$\bar{I} = (\bar{I} - \bar{A}) \cdot \underbrace{(\bar{I} - \bar{A})^{-1}}_{\bar{D}}$$

$$\bar{I} = (\bar{I} - \bar{A}) \bar{D}$$

$$\Leftrightarrow \bar{I} = \bar{D} - \bar{A}\bar{D}$$

$$\Leftrightarrow \bar{A}\bar{D} = \bar{D} - \bar{I}$$

$$\Leftrightarrow \bar{A}(\bar{I} - \bar{A})^{-1} = \underbrace{(\bar{I} - \bar{A})^{-1} - \bar{I}} \qquad (3.3.2.4)$$

2. Schritt

$$\bar{A}^{(+)} \bar{x}^{(+)} = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{c} \\ \bar{\ell} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\bar{I} - \bar{A})^{-1} \bar{c} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{\bar{A}(\bar{I} - \bar{A})^{-1}} \bar{c} + \bar{c} \\ \underbrace{\bar{\ell}(\bar{I} - \bar{A})^{-1} \bar{c}}_{= 1 \,!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ((\bar{I} - \bar{A})^{-1} - \bar{I}) \bar{c} + \bar{c} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\bar{I} - \bar{A})^{-1} \bar{c} \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{x}^{(+)}$$

- $\bar{x}^{(+)}$ ist rechtsseitiger Eigenvektor von $\bar{A}^{(+)}$ mit

  $\phi_m = 1$

$$\bar{A}^{(+)} \bar{x}^{(+)} = \underbrace{\phi_m}_{=1} \bar{x}^{(+)} \qquad (3.3.2.5)$$

$\boxed{\text{abhängig vom Skalar } \alpha > 0}$

- Da unzerlegbare und nichtnegative Matrizen nur ein strikt positiven Eigenvektor haben, der zu ϕ_m gehört, muss $\phi_m = 1$ sein (Perron-Frobenius)

- Interpretation von $\bar{x}^{(+)}$?

$$\bar{x}^{(+)} = \begin{pmatrix} (\bar{I}-\bar{A})^{-1}\bar{c} \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} x_1^{(+)} \\ \vdots \\ x_n^{(+)} \\ \hline 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array}}\right\} * \\ \} ** \end{array}$$

* Benötigter Bruttooutput, um netto $\bar{c}$ zu haben

** $\bar{l}(\bar{I}-\bar{A})^{-1}\bar{c} = 1$

- Gegeben sei die nichtnegative und unzerlegbare Matrix $\bar{A}^{(+)}$

(a) Falls ein strikt positiver Vektor $\bar{x}^{(+)}$ existiert, für den gilt: $\bar{A}^{(+)} \bar{x}^{(+)} = \bar{x}^{(+)}$, so liegt die sog. <u>einfache Reproduktion</u> vor

(b) Falls ein strikt positiver Vektor $\bar{x}^{(+)}$ existiert, für den gilt: $\bar{A}^{(+)} \bar{x}^{(+)} < \bar{x}^{(+)}$, so liegt die sog. <u>erweiterte Reproduktion</u> vor

- Notw. Bedingung für erweiterte Reproduktion:

  $\phi_m^{\bar{A}^{(+)}} < 1 \rightarrow \bar{A}^{(+)}$ muss produktiv sein

- Notw. Bedingung für $\phi_m^{\bar{A}^{(+)}} = 1$: $\phi_m^{\bar{A}} < 1$

  $\rightarrow \bar{A}$ muss produktiv sein

- Falls nicht $\bar{A}\bar{x} < \bar{x}$ gilt, kann nicht

  $\bar{A}^{(+)} \bar{x}^{(+)} = \bar{x}^{(+)}$ gelten

- Formal: $\det(\bar{A}) < \det(\bar{A}^{(+)})$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{c} \\ \bar{\ell} & 0 \end{pmatrix} \Big\} \text{ streiche } (n+1)\text{-Spalte und } (n+1)\text{-Zeile}$$

$\det(\bar{A})$ Hauptminor von $\bar{A}^{(+)}$

- $\phi_m^A < \phi_m^{A^{(+)}}$

Beispiel: 2 Ware

- $\bar{A} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$; $(\bar{I} - \bar{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}6 & 1{,}4 \\ 0{,}4 & 1{,}6 \end{pmatrix}$

- $\bar{l} = (1, 1)$

- $\bar{y} = \begin{pmatrix} 100 \\ 600 \end{pmatrix}$

- Offenes Leontief-Modell:

$$\bar{x} = \bar{A}\bar{x} + \bar{y} \iff \bar{x} = (\bar{I} - \bar{A})^{-1} \bar{y}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1{,}6 & 1{,}4 \\ 0{,}4 & 1{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

- Um netto $\bar{y} = \begin{pmatrix} 100 \\ 600 \end{pmatrix}$ zu haben, müssen brutto $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$ produziert werden

- Einfache Reproduktion: $\bar{l}\,(\bar{I}-\bar{A})^{-1}\,\bar{c} = 1$

- $\bar{c} = \frac{1}{2000}\begin{pmatrix}100\\600\end{pmatrix}$ } Auf 1 Zeiteinheit umrechnen

$= \begin{pmatrix}0{,}05\\0{,}3\end{pmatrix}$

- $\bar{A}^{(+)} = \begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}05\\0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

- $\bar{A}^{(+)}\,\bar{x}^{(+)} = \bar{x}^{(+)}$; $\bar{x}^{(+)} = \begin{pmatrix}(\bar{I}-\bar{A})^{-1}\bar{c}\\1\end{pmatrix}$

- $(\bar{I}-\bar{A})^{-1}\,\bar{c} = \begin{pmatrix}1{,}6 & 1{,}4\\0{,}4 & 1{,}6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}05\\0{,}3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}05\\0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}5\\1\end{pmatrix}$

- Jeder Vektor $a\begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}5\\1\end{pmatrix}$ mit $a>0$ löst dieses Gleichungssystem ökonomisch sinnvoll

- z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 24 \\ 24 \\ 48 \end{pmatrix}$ usw.

- Ermittlung der Produktions<u>struktur</u>, nicht des absoluten Niveaus!

- $\bar{\lambda}$?

$$\bar{\lambda} = \bar{l}\,(\bar{I} - \bar{A})^{-1} = (1,\ 1)\begin{pmatrix} 1{,}6 & 1{,}4 \\ 0{,}4 & 1{,}6 \end{pmatrix} = (2,\ 3)$$

- AW Ware 1 : $2 \left[\frac{MJ}{M_1}\right]$ (M := „Mengeneinheit")

- " Ware 2 : $3 \left[\frac{MJ}{M_2}\right]$