12. VL PWT

- Leontief-Inverse

$$\bar{x} = \underbrace{\left(\bar{I} - \bar{A}\right)}_{\text{Leontief-Inverse}}{}^{-1}\,\bar{y} \qquad (3.2.2.3)$$

Leontief-Inverse:
„Bindeglied" zwischen Brutto- und Nettoebene

- $\bar{D} := \left(\bar{I} - \bar{A}\right)^{-1}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (3.2.2.4)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} y_1 + d_{12} y_2 + \dots + d_{1n} y_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ d_{n1} d y_1 + d_{n2} y_2 + \dots + d_{nn} y_n \end{pmatrix}$$

- $$\frac{\partial x_i}{\partial y_k} = d_{ik} \qquad (3.2.2.5)$$

- d_{ik} gibt die (unendlich kleine) Veränderung des i-ten Bruttooutputs an, falls die Endnachfrage des Ware k um eine (unendlich kleine) Einheit variiert

- d_{ik} gibt den gesamtwirtschaftl. Verbrauch von Ware i an, die direkt und indirekt über alle Fertigungsstufen benötigt wird, um eine Einheit von Ware k herzustellen

- Darum heißt $\bar{D}$ auch Gesamtbedarfsmatrix

- Nicht verwechseln: $\bar{A}$ -> Direktbedarfsmatrix

- Beispiel: Pasinetti 1988: 87f.

- $\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0 \end{pmatrix}$ mit Ware 1 = Weizen (W)

und Ware 2 = Eisen (E)

- $\bar{y} = (\bar{I} - \bar{A})\bar{x}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -0{,}6 \\ -0{,}3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad (3.2.2.6)$$

- $(I - A)$ invertiere:

$$(I - A)^{-1} = D = \begin{pmatrix} 1{,}2195 & 0{,}7317 \\ 0{,}3658 & 1{,}2195 \end{pmatrix} \qquad (3.2.2.7)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2195 & 0{,}7317 \\ 0{,}3658 & 1{,}2195 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad (3.2.2.8)$$

- Produktion von 1 W erfordert in Sektor 1 als <u>direkten</u> Input: 0 W und 0,3 E

Direkt=

- " " 1 E " " " 2 } bedarf
als <u>direkten</u> Input: 0,6 W und 0 E

- Endverbrauch von 1 W erfordert
1,2195 W (Endverbrauch: 1, Input: 0,2195)
und 0,3658 (nur Input)

} Gesamtbedarf

- Endverbrauch von 1 E erfordert
0,7317 W (nur als Input) und 1,2195 E
(Endverbrauch = 1, Input = 0,2195)

- Sei z.B. $\bar{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ } So funktionierte (im Prinzip) Planwirtschaft

- $x_1 = 1{,}2195 \cdot 1 + 0{,}7317 \cdot 1 = 1{,}9512$ W

- $x_2 = 0{,}3658 \cdot 1 + 1{,}2195 \cdot 1 = 1{,}5853$ E

- Gesamtbedarf für $\bar{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.2.3 Produktive und profitable Matrizen

$$\underbrace{\bar{A}\bar{x}}_{\text{Inputs}} + \underbrace{\bar{y}}_{\text{Endverbrauch}} = \underbrace{\bar{x}}_{\text{Bruttoprodukt}} \qquad (3.2.3.1)$$

- Alternative Formulierung

$$\left.\underbrace{\bar{A}\bar{x}}_{\text{Input}} < \underbrace{\bar{x}}_{\text{Output}}\right\} \text{Mengensystem} \qquad (3.2.3.2)$$

$$\left.\underbrace{\bar{p}\bar{A}}_{\text{Input = Kosten}} < \underbrace{\bar{p}}_{\text{Erlöse}}\right\} \text{Preissystem} \qquad (3.2.3.3)$$

<u>Definition 3.2.3.1</u> Die nichtnegative $(n \times n)$-Inputkoeffizientenmatrix $\bar{A}$ heißt:

(a) <u>produktiv</u>, wenn es Bruttooutputvektor $\bar{x} \geq \bar{0}$ gibt, sodass $\bar{A}\bar{x} < \bar{x}$ gilt

(b) <u>profitabel</u>, wenn es eine Preisvektor $\bar{p} \geq \bar{0}$

gibt, sodass $\bar{p}\bar{A} < \bar{p}$ ist.

- Es gibt mehrere Kriterien, um das sicherzustellen
- (3.2.3.2) und (3.2.3.3) als Eigenwertproblem formulieren:

$$\bar{A}\bar{x} < \bar{x} \iff \bar{A}\bar{x} = \phi\, x \qquad (3.2.3.4)$$

< 1 ?

$$\bar{p}\bar{A} < \bar{p} \iff \bar{p}\bar{A} = \phi_2\, \bar{p} \qquad (3.2.3.5)$$

- Wenn $\phi_n < 1$ bezüglich $\bar{A} \Rightarrow \bar{A}$ produktiv bzw. profitabel
- Wegen des Satzes von Perron-Frobenius sind $\bar{x}$ und $\bar{p}$ dann strikt positiv!
- Man kann zeigen: $\phi_m < 1 \iff (I - A)^{-1} > \bar{0}$

<u>Satz 3.2.3.1</u> Die beiden folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) $\bar{A}$ ist produktiv.

(b) $\bar{A}$ ist profitabel.

- Nachweis: Wegen $\det(\bar{A}) = \det(\bar{A}^T)$ haben $\bar{A}$ und $\bar{A}^T$ dasselbe charakt. Polynom, d.h.

$$\bar{A}\,\bar{x} = \phi\,\bar{x}$$

$$\bar{A}^T\,\bar{z} = \phi\,\bar{z}$$

- Sei nun $\bar{z}^T$ ein <u>linksseitiger</u> Eigenvektor ($\bar{A}^T\bar{z} = \bar{z}^T\bar{A}$):

$$\bar{z}^T\bar{A} = \phi\,\bar{z}^T$$

- Also gehören links- und rechtsseitige Eigenvektoren zu identischen Eigenwerten!

- $\bar{p}$ -> links. Eigenvektor, $\bar{x}$ -> rechts. Eigenvektor

3.2.4 Eine iterative Berechnung von $(\bar{I}-\bar{A})^{-1}$

- Lineare Algebra:

$$(\mu \bar{I} - \bar{A})^{-1} = \frac{1}{\mu}\left(\bar{I} + \frac{1}{\mu}\bar{A} + \left(\frac{1}{\mu}\bar{A}\right)^2 + \left(\frac{1}{\mu}\bar{A}\right)^3 + \cdots\right)$$

falls $\mu < |\phi_m|$, wobei ϕ_m bezüglich $\bar{A}$

- Für $\bar{D} = (\bar{I}-\bar{A})$ gilt $\mu = 1$, außerdem ist $\phi_m < 1$ für produktive Matrix $\bar{A}$

$$(\bar{I}-\bar{A})^{-1} = \bar{I} + \bar{A} + \bar{A}^2 + \bar{A}^3 + \cdots \qquad (3.2.4.1)$$

- Jeder Summand gibt Produktionsbedarf für die unterschiedlichen Produktionsstadien („Runde") an

- Mit Beispiel von Pasinetti 1988: 89 ff.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}18 & 0 \\ 0 & 0{,}18 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{}_{\bar{I}} \quad \underbrace{}_{\bar{A}} \quad \underbrace{}_{\bar{A}^2}$$

$$+ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0{,}108 \\ 0{,}054 & 0 \end{pmatrix}}_{\bar{A}^3} + \ldots$$

- Endverbrauch : $\bar{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 1. Runde : $\bar{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ -> entspricht $\bar{y}$
- 2. Runde : $\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0 \end{pmatrix}$ -> Direktbedarf 1. Runde für $\bar{y}$
- 3. Runde : $\bar{A}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}18 & 0 \\ 0 & 0{,}18 \end{pmatrix}$ -> Direktbedarf für 2. Runde
- usw. ...
- vertikale Integration : Alle Produktionsstufen durchlaufen

3.2.5 Die maximale Wachstumsrate

- $\bar{A}\bar{x} = \phi\bar{x}$ mit $0 < \phi_m \leq 1$ (3.2.5.1)

- Alternativ: $\bar{A}\bar{x} + \bar{y} = \bar{x}$ (3.2.5.2)

- Alternativ 2:

$$(1+g)\bar{A}\bar{x} = \bar{x} \quad \text{mit } g(\bar{A}x) := \bar{y} \qquad (3.2.5.3)$$

g : Wachstumsrate

- Sei nun $\phi := \dfrac{1}{1+g}$

$$\bar{A}\bar{x} = \underbrace{\left(\frac{1}{1+g}\right)}_{\text{Eigenwert}}\bar{x} \qquad (3.2.5.4)$$

- Produktive Matrix $\bar{A} \rightarrow \phi_m = \dfrac{1}{1+g_m} < 1$ [Konsum = 0]

- Umformen:

$$g_m = \frac{1}{\phi_m} - 1 \quad \text{mit } 0 < \phi_m \leq 1 \qquad (3.2.5.5)$$

- $\phi_m = 1 \Rightarrow g_m = 0 \rightarrow$ „stationäre Ökonomie"

- Je dichter ϕ_m an Null liegt, desto größer ist g_m

- g_m ist das max. technische Wachstumspotential, nicht das <u>realisierte</u> Wachstum

3.3 Arbeitswerttheorie (AWT)

3.3.1 Grundlage

- Erinnerung: Kapitel 1

- AWT $\rightarrow$ Nur Arbeitskraft als Wertquelle

- Arbeitswert: direkter + indirekter Arbeitsbedarf

- Vertikale Integration

- $\bar{\lambda}$:= Zeilenvektor der Arbeitswerte

$$\bar{\lambda} = \underbrace{\bar{l}\,\bar{I}}_{\text{direkte}} + + \underbrace{\bar{l}\,\bar{A}}_{\substack{\text{1. Runde} \\ \text{indirekte}}} + \underbrace{\bar{l}\,\bar{A}^2}_{\substack{\text{2. Runde} \\ \text{indirekte}}}$$

Arbeitsbedarf Arbeitsaufwand Arbeitsaufwand

$+ \underbrace{\bar{l}\bar{A}^3}$

3. Runde
indirekte
Arbeitsaufwand